

COMMERCIUM EPISTOLICUM

D. *JOHANNIS COLLINS*,

ET ALIORUM

DE

ANALYSI

PROMOTA:



JUSSU

SOCIETATIS REGIÆ

In lucem editum.



LONDINI:

Typis Pearsonianis, Anno M DCC XII.

AD
LECTOREM.

QUAM *ob causam editæ sint hæ Epistolæ Chartulæque collectaneæ, apparebit ex Literis D.* Leibnitii *&* D. Keillii *in fine subjunctis. Offensionem attulerant D.* Leibnitio *nonnulla, quæ scripto prodidit D.* Keillius *in Actis* Londinensibus *anno* 1708, *injuriam D.* Newtono *oblatam propulsans. Datis igitur ad Societatis Regalis Secretarium literis, de calumniâ questus D.* Leibnitius, *remedium a Societate petiit; idque eos æquum credidit judicaturos, ut D.* Keillius *culpam suam publicè fateretur. D.* Keillio *ea est pars visa potior, ut ad illa, quæ questus erat D.* Leibnitius, *literis scriptis responderet: Quibus in literis quæ anteà ediderat & exposuit pleniùs & vindicavit. D.* Leibnitius *nequaquam his satis sibi factum arbitratus, literas alteras ad Societatem dedit; in quibus adhuc de D.* Keillio *questus,* novum *eum* hominem *appellat,* parumque peritum rerum anteactarum cognitorem, nec mandatum ab eo, cujus interesset, habentem; *Societatisq;* æquitati committit, annon coercendæ sint vanæ & injustæ vociferationes.

Versabatur in Angliâ *D.* Leibnitius *ineunte anno* 1673, *iterumq; mense* Octobri 1676; *& interjecto illo temporis intervallo in* Galliâ *egit. Quo omni temporis spatio, mutuis acceptis datisq; literis, commercium habuit cum D.* Oldenburgo, *&,* Oldenburgi *operâ, cum D.* Collinio *itidem, & nonnunquam etiam cum D.* Newtono. *Quid autem ille ex* Anglis *tandem, vel tum cùm* Londini *esset, vel ex literis istis mutuò datis, edidicerit, in eo ferè vertitur hæc omnis quæstio. D.* Oldenburgus & Collinius *jam diù obierunt; D.* Newtonus *autem tum* Cantabrigiæ *egit; parumq; amplius novit, quàm quod ex literis ipsius a D.* Wallisio *deinceps editis apparet. D.* Newtonus *neque a D.* Keillii *partibus Testis esse potest, nec D.* Leibnitius *ipse a suis: Alius autem in vivis Testis est nullus. Societas itaq; Regalis, a D.* Leibnitio *bis adversus*

versus Keillium *appellata, selectorum ex Societate arbitrorum consessum constituit, qui literas literarumque transcriptarum libellos, aliasque chartulas a* D. Oldenburgo *penes Societatem relictas, & siquid inter* D. Collinii *schedas repertum huc faceret, perscrutarentur, Sententiamq; suam ad Societatem referrent: jussitq; tandem ut Sententia illa a selectorum arbitrorum consessu relata, unà cum ipsis literarum aliarumque chartularum excerptis, emitteretur.*

Cùm D. Newtonus *Analysin istam scripto traderet, quæ sub initium horum Collectaneorum impressa est, habuit jam tum* †*Methodum generalem æquationes finitas in infinitas resolvendi, & æquationes tum finitas tum infinitas applicandi ad Problemata solvenda, ope proportionum Augmentorum momentaneorum Quantitatum nascentium & augescentium. Augmenta hæc appellat* D. Newtonus *Particulas & Momenta;* D. Leibnitius *autem Infinitesimales, Indivisibiles & Differentias. Quantitates augescentes appellat* D. Newtonus *Fluentes;* D. Leibnitius *autem Summas. Et velocitates augmenti appellat* D. Newtonus *Fluxiones; istasq; Fluxiones exponit per quantitatum fluentium momenta.*

† De hac Methodo ex Methodis Serierum & Fluentium composita scripsit infra *Newtonus*, pag. 14, 15, 18, 30, 55, 56, 71, 85, 86.

Quæ pars hujus Methodi in eo sita est ut æquationes finitæ in infinitas resolvantur, eam cum D. Leibnitio, *rogatu suo, communicavit* D. Newtonus, *literis ad illum datis* Junii 13. & Octobris 24. 1676. *Reliquam hujus Methodi partem, postquam eousq; attigerat ut eam satis* * *obviam factam existimaret; ne sibi deinceps subriperetur priusquam eam exponere visum foret, literis occultis ita celavit, quo modo aliàs* Galilæus *atque* Hugenius *fecerant. Hujus posterioris partis inventionem sibi vendicat* D. Leibnitius: D. Keillius *autem eam* D. Newtono *adserit;* Keillioq; *suffragatur Sententia selectorum e Societate arbitrorum consessûs. Alios tamen Exteros, qui methodum istam a* D. Leibnitio *acceperint aut aliter obtinuerint, nihil quidquam in his Collectaneis est quod ullo pacto afficiat. Illi, quid inter* D. Leibnitium & D. Oldenburgum *commercii esset, ignorabant. Illis, quòd Methodum, quam utilem esse compererant, in rem suam adhibuerint atq; excoluerint; id verò laudi est dandum.*

* Vid. pag. 72. lin. 1.

Subjunctæ sunt Epistolis Annotationes quædam; quò Lectores, quibus minus est otii, & Epistolas inter se faciliùs conferre, & semel perlectas intelligere queant.

Commer-

Commercium Epistolicum

D. *JOHANNIS COLLINS*,

ET ALIORUM

De Analysi promota:

JUSSU

SOCIETATIS REGIÆ

In lucem editum.

Excerpta ex Epistola reverendi viri D. Isaaci Barrow *ad D.* J. Collins, Cantabrigiæ 20 Julii 1669 *datâ, cujus habetur Autographon.*

* AMICUS quidam apud nos commorans, qui eximio in his rebus pollet ingenio, nudiustertius chartas quasdam mihi tradidit, in quibus Magnitudinum dimensiones supputandi Methodos, *Mercatoris* methodo pro Hyperbola similes, maxime vero Generales, descripsit, simulque Æquationes resolvendi, quæ, ut opinor, tibi placebunt, quas una cum proximis literis ad te mittam.

* A Friend of mine here, that hath an excellent Genius to these Things, brought me the other Day some Papers, wherein he hath set down Methods of calculating the Dimensions of Magnitudes, like that of Mr. *Mercator* for the Hyperbola, but very general, as also of Resolving Equations, which I suppose will please you, and I shall send them by the next.

Ex Epistola ejusdem ad eundem, 31 Julii 1669 *data, pariterque ipsius* Barrovii *manu scripta.*

* Mitto quas pollicitus eram Amici chartas, quæ uti spero haud parum te oblectabunt. Remittas, quæso, quum eas quantum tibi visum fuerit perlegeris; id enim postulavit Amicus meus, cum primum eum rogavi, ut eas tecum communicare mihi liceret. Quantocyus igitur, obsecro, te eas recepisse fac me certiorem, quod illis metuo, quippe qui eas per Veredarium publicum ad te mittere non dubitaverim, quo tibi morem gererem quam citissime.

* I send you the Papers of my Friend I promis'd, which I presume will give you much Satisfaction: I pray, having perused them so much as you think good, remand them to me, according to his desire, when I ask'd him the Liberty to impart them to you; I pray give me notice of your receiving them, with your soonest Convenience, that I may be satisfied of their Reception; because I am afraid of them, venturing them by the Post, that I may not longer delay to correspond with your desire.

Ex Epistola ejusdem ad eundem, 20 Augusti 1669 *data, cujus etiam comparet Autographon.*

** Amici chartas tibi placuisse gaudeo; est illi nomen *Newtonus,* Collegii nostri Socius, & juvenis, (secundus enim, ex quo Artium Magistri gradum cepit, jam agitur annus,) et qui, eximio quo est acumine, permagnos in hac re progressus fecit. Illas, si vis, cum Nobili Domino Vicecomite *Brounkero* communica.

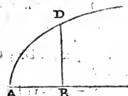
** I am glad my Friend's Paper gives you so much Satisfaction; his Name is Mr. *Newton,* a Fellow of our College, and very young, (being but the second Year Master of Arts,) but of an extraordinary Genius and Proficiency in these Things; you may impart the Papers, if you please, to my Lord *Brounker.*

Exem-

Exemplar dictarum chartarum, manu D. Collins *exaratum & in scriniis ejus repertum, quod cum ipsius D.* Newtoni *Autographo collatum ad verbum consentire invenimus. Hujus autem titulus est*

DE ANALYSI PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accurate demonstratam habes.



BASI *AB* Curvæ alicujus *AD*, sit Applicata *BD* perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,

Curvarum Simplicium Quadratura.

REG. I. *Si* $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = *Area ABD.*

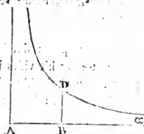
Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2 (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3$ = ABD.

2. Si $4\sqrt{x} (= 4x^{\frac{1}{2}}) = y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} (= \frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3})$ = ABD.

3. Si $\sqrt[3]{x^5} (= x^{\frac{5}{3}}) = y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} (= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8})$ = ABD,

4. Si $\frac{1}{x^2} (= x^{-2}) = y$, id est, si $a = 1 = n$, & $m = -2$;



Erit $(\frac{1}{-1}x^{\frac{-1}{1}} =) -x^{-1} (= \frac{-1}{x}) = \alpha$BD, infinite versus α protensæ, quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}} (= x^{-\frac{3}{2}}) = y$; Erit $(\frac{2}{-1}x^{\frac{-1}{2}} =) \frac{2}{-\sqrt{x}}$ = BDα.

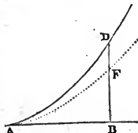
6. Si $\frac{1}{x} (= x^{-1}) = y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0}$ = Infinitæ, qualis est Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.

Com-

Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

R E G. II. *Si valor ipsius* y *ex pluribus istiusmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a singulis Terminis emanant.*

Exempla Prima.



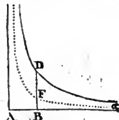
Si $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD. Etenim si semper sit $x^2 =$ BF, et $x^{\frac{3}{2}} =$ FD, erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3 =$ superficiei AFB descriptæ per Lineam BF, et $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ AFD descriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ toti ABD.

Sic si $x^2 - x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

Et si $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$; Erit $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 =$ ABD.

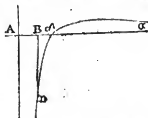
Exempla Secunda.

Si $x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit $-x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha$BD. Vel si $x^{-2} - x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit $-x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha$BD.



Quarum signa si mutaveris habebis Affirmativum valorem $(x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ vel $x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}})$ superficiei αBD, modo tota cadat supra basim ABα.

Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cum Curva decussat suam Basin inter B et α, ut hic vides in δ,) ista parte a parte superiori subducta, habebis valorem Differentiæ: Earum vero Summam si cupis, quære utramque Superficiem seorsim, et adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo.



Exempla

Exempla Tertia.

Si $x^2 + x^{-2} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$ = Superficiei deſcriptæ. Sed hic notandum eſt, quod dictæ Superficiei partes ſic inventæ jacent ex diverſo latere Lineæ BD.

Nempe, poſito x^2 = BF, & x^{-2} = FD; Erit $\frac{1}{3}x^3$ = ABF Superficiei per BE deſcriptæ, & $-x^{-1}$ = DFα Superficiei deſcriptæ per DF.

Et hoc ſemper accidit cum Indices ($\frac{m+n}{n}$) rationum Baſis x in valore Superficiei quæſitæ, ſint variis ſignis affecti. In hujuſmodi Caſibus, pars aliqua BDδβ Superficiei media (quæ ſola dari poterit, cum Superficies ſit utrinque infinita) ſic invenitur.

Subtrahe Superficiem ad minorem Baſin Aβ pertinentem, a Superficie ad majorem Baſin AB pertinente, & habebis βBDδ Superficiem differentiæ Baſium inſiſtentem. Sic in hoc Exemplo.

Si AB = 2, & Aβ = 1; Erit βBDδ = $\frac{17}{6}$:

Etenim Superficies ad AB pertinens (viz. ABF — DFα) erit $\frac{8}{3} - \frac{1}{2}$ ſive $\frac{13}{6}$; et Superficies ad Aβ pertinens (viz. Aφβ − δφα) erit $\frac{1}{3} - 1$, ſive $-\frac{2}{3}$: et earum differentia (viz. ABF — DFα — Aφβ + δφα = βBDδ) erit $\frac{13}{6} + \frac{2}{3}$ ſive $\frac{17}{6}$.

Eodem modo, ſi Aβ = 1, AB = x; Erit βBDδ = $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$.

Sic ſi $2x^3 - 3x^5 - \frac{2}{3}x^{-4} + x^{-\frac{3}{5}} = y$, & Aβ = 1;

Erit βBDδ = $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{9}x^{-3} + \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} - \frac{49}{18}$.

Denique notari poterit quod ſi quantitas x^{-1} in valore ipſius y reperiatur, iſte Terminus (cum Hyperbolicam ſuperficiem generat) ſeorſim a reliquis conſiderandus eſt.

Ut ſi $x^2 + x^{-3} + x^{-1} = y$: Sit x^{-1} = BF, & $x^2 + x^{-3}$ = FD, ac Aβ = 1; Et erit δφFD $= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^{-2}$, utqote quæ ex Terminis $x^2 + x^{-3}$ generatur.

Quare, ſi reliqua Superficies βφFB, quæ Hyperbolica eſt, ex Calculo aliquo ſit data, dabitur tota βBDδ.

Aliarum Omnium Quadratura.

R E G. III. *Sin valor ipsius* y, *vel aliquis ejus Terminus sit præcedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt; & ex istis Terminis quæsitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.*

Exempla Dividendo.

Sit $\frac{aa}{b+x} = y$; Curva nempe existente Hyperbola.

Jam ut Æquatio ista a Denominatore suo liberetur, Divisionem sic instituto.

$$b+x)\; aa + 0 \left(\frac{aa}{b} - \frac{aax}{b^2} + \frac{aax^2}{b^3} - \frac{aax^3}{b^4} \text{ \&c.} \right.$$

$$aa + \frac{aax}{b}$$

$$0 - \frac{aax}{b} + 0$$

$$-\frac{aax}{b} - \frac{aax^2}{b^2}$$

$$0 + \frac{aax^2}{b^2} + 0$$

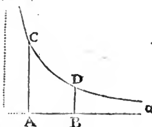
$$+\frac{aax^2}{b^2} + \frac{aax^3}{b^3}$$

$$0 - \frac{aax^3}{b^3} + 0$$

$$-\frac{aax^3}{b^3} - \frac{aax^4}{b^4}$$

$$0 + \frac{aax^4}{b^4}$$

&c.



Et sic vice hujus $y = \frac{aa}{b+x}$, nova prodit $y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4}$, &c. serie istac infinite continuata; Adeoque (per Regulam Secundam) Area quæsita ABDC æqualis erit ipsi $\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$, &c. infinitæ etiam seriei, cujus tamen Termini pauci initiales sunt in usum quemvis satis exacti, si modo x sit aliquoties minor quam b.

Eodem modo, si sit $\frac{1}{1+xx} = y$, Dividendo prodibit $y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$, &c. Unde (per Regulam Secundam) erit ABDC $= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$, &c.

Vel.

Vel si Terminus xx ponatur in divisore primus, hoc modo $xx+1$), prodibit $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$, &c. pro valore ipsius y; Unde (per Regulam Secundam)
erit $BD\alpha = -x^{-1}+\frac{1}{3}x^{-3}-\frac{1}{5}x^{-5}+\frac{1}{7}x^{-7}$, &c. Priori modo procede cum x est satis parva, posteriori cum satis magna supponitur.

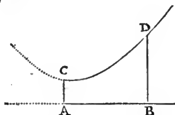
Denique si $\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}=y$; Dividendo prodit
$2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^{2}+34x^{\frac{5}{2}}$ &c. unde erit
$ABDC = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{2}+\frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{13}{3}x^{3}$ &c.

Exempla Radicem Extrahendo.

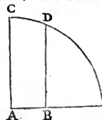
Si fit $\sqrt{aa+xx}=y$, Radicem sic extraho,

$$aa+xx\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}\right.\ \text{\&c.}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{aa} \\
0+xx \\
\quad \underline{xx+\frac{x^4}{4a^2}} \\
\quad 0-\frac{x^4}{4a^2} \\
\qquad \underline{-\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6}} \\
\qquad\quad 0+\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6} \\
\qquad\qquad \underline{+\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}+\frac{x^{12}}{256a^{10}}} \\
\qquad\qquad\quad 0-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\qquad\qquad\qquad \text{\&c.}
\end{array}$$



Unde, pro Æquatione $\sqrt{aa+xx}=y$, nova producitur, viz.
$y=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Et (per Reg. 2.) Area quæsita ABDC erit $=ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.
Et hæc est Quadratura Hyperbolæ.



Eodem modo, si fit $\sqrt{aa-xx}=y$, ejus Radix erit
$a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$ &c.
Adeoque Area quæsita ABDC erit
æqualis $ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.
Et hæc est Quadratura Circuli

Vel.

Vel si ponas $\sqrt{x - xx} = y$; erit Radix æqualis infinitæ seriei

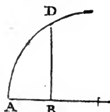
$x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

Et Area quæsita ABD æqualis erit

$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$ &c.

sive $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x$ &c.

Et hæc est Area Circuli quadratura.



Si $\frac{\sqrt{1 + ac^2}}{\sqrt{1 - bx^2}} = y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ;) Extrahendo radicem utramq; prodit

$$\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8} \text{ \&c.}$$

Et Dividendo, sicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{array}{lllll} 1 + \frac{1}{2}bx^2 & + \frac{3}{8}b^2x^4 & + \frac{5}{16}b^3x^6 & + \frac{35}{128}b^4x^8 & \text{\&c.} \\ \quad + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab & + \frac{3}{16}ab^2 & + \frac{5}{32}ab^3 & \\ & - \frac{1}{8}a^2. & - \frac{1}{16}a^2b & - \frac{3}{64}a^2b^2 & \\ & & + \frac{1}{16}a^3 & + \frac{1}{32}a^3b & \\ & & & - \frac{5}{128}a^4 & \end{array}$$

Adeoque Aream quæsitam

$$\begin{array}{lll} x + \frac{1}{6}bx^3 & + \frac{3}{40}b^2x^5 & \text{\&c.} \\ \quad + \frac{1}{6}a & + \frac{1}{20}ab & \\ & - \frac{1}{40}a^2 & \end{array}$$

Sed observandum est, quod Operatio non raro abbreviatur per debitam Æquationis preparationem, ut in allato Exemplo $\frac{\sqrt{1 + ax^2}}{\sqrt{1 - bx^2}} = y$. Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1 - bxx}$ multiplices prodibit

$$\frac{\sqrt{1 + \begin{array}{l} ax^2 \\ -b \end{array} - abx^4}}{1 - bx^2} = y,$$

& reliquum opus perficitur extrahendo Radicem Numeratoris tantum, & dividendo per Denominatorem.

Ex hisce, credo, satis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipsius y (quibuscunque Radicibus vel Denominatoribus sit perplexus, ut hic videre est; $x^3 + \frac{\sqrt{x - \sqrt{1 - xx}}}{\sqrt[3]{ax^2 + x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3 + 2x^5 - x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x + x^2} - \sqrt[2]{2x - x^{\frac{2}{3}}}} = y$) in series Infinitas simplicium Terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæsita Superficies cognoscetur.

Exem-

Exempla per Resolutionem Æquationum.

Numeralis Æquationum affectarum Resolutio.

Quia tota difficultas in Resolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illustrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, resolvenda: Et sit 2, numerus qui minus quam decima sui parte differt a Radice quæsita. Tum pono $2 + p = y$, & substituo hunc ipsi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus Radix p exquirenda est, ut quotienti addatur: Nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, sive $p = 0{,}1$ prope veritatem est; itaque scribo 0,1 in quotiente, & suppono $0{,}1 + q = p$, & hunc ejus valorem, ut prius substituto, unde prodit $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2{,}10000000$ $- 0{,}00544853$ $+ 2{,}09455147 = y$
$2 + p = y$	$+ y^3$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$
	$- 2y$	$- 4 - 2p$
	$- 5$	$- 5$
	Summa	$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+ p^3$	$+ 0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$
	$+ 6p^2$	$+ 0{,}06 + 1{,}2 + 6{,}0$
	$+ 10p$	$+ 1, + 10,$
	$- 1$	$- 1,$
	Summa	$+ 0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$- 0{,}0054 + r = q$	$+ 6{,}3q^2$	$+ 0{,}000183708 - 0{,}06804r + 6{,}3r^2$
	$+ 11{,}23q$	$- 0{,}060642 + 11{,}23$
	$+ 0.061$	$+ 0{,}061$
	Summa	$+ 0{,}000541708 + 11{,}16196r + 6{,}3r^2$
$- 0{,}00004854 + s = r$		

Et cum $11{,}23q + 0{,}061$ veritati prope accedit, sive fere sit q æqualis $- 0{,}0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur Figuræ, quot locis primæ Figuræ hujus & principalis quotientis exclusive distant) scribo $- 0{,}0054$ in inferiori parte quotientis, cum negativa sit.

Et supponens $- 0{,}0054 + r = q$, hunc ut prius substituto, & operationem sic produco quo usq; placuerit. Verum si ad his tot figuras tantum quot in quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare

tinuare cupiam, pro q substituto $-0{,}0054+r$ in hanc $6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061$, scilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem suam neglecto, & prodit $6{,}3r^2+11{,}16196r+0{,}000541708=0$, fere, sive (rejecto $6{,}3r^2$) $r=\frac{-0{,}000541708}{11{,}16196}=-0{,}00004853$ fere, quam scribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa subducens habeo 2,09455147 Quotientem quæsitam.

Æquationes plurium dimensionum nihilo secius resolvuntur, & operam sub fine, ut hic factum fuit levabis, si primos ejus terminos gradatim omiseris.

Præterea notandum est quod in hoc exemplo, si dubitarem an $0{,}1=p$ veritati satis accederet, pro $10p-1=0$, finxissem $6p^2+10p-1=0$, & ejus radicis primam figuram in Quotiente scripsissem; & secundam vel tertiam Quotientis figuram sic explorare convenit, ubi in Æquatione ista ultimo resultante quadratum coefficientis penultimi termini, non fit decies majus quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

Imo laborem plerumque minues præsertim in Æquationibus plurimarum dimensionum, si figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc est extrahendo minorem radicum, ex tribus ultimis terminis Æquationis novissime resultantis) exquiras: Isto enim modo figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc Methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nescio, certe mihi videtur præ reliquis simplex, & usui accommodata. Demonstratio ejus ex ipso modo operandi patet, unde cum opus sit, in memoriam facile revocitur.

Æquationes in quibus vel aliqui vel nulli Termini desint, eadem fere facilitate tractantur; & Æquatio semper relinquitur, cujus Radix una cum acquisita Quotiente adæquat Radicem Æquationis primo propositæ. Unde Examinatio Operis hic æque poterit institui ac in reliqua Arithmetica, auferendo nempe Quotientem a Radice primæ Æquationis (sicut Analystis notum est) ut Æquatio ultima vel Termini ejus duo tresve ultimi producantur inde. Quicquid laboris hic est, istud in Operatione substituendi quantitates unas pro aliis reperietur: Id quod varie perficias, at sequentem modum maxime expeditum puto, præsertim ubi Numeri Coefficientes constant ex pluribus Figuris.

Sit $p+3$ substituenda pro y in hanc $y^4-4y^3+5y^2-12y+17=0$. Et cum ista possit resolvi in hanc formam

$y-4\times y+5\times y-12\times y+17=0$. Æquatio nova sic generabitur $p-1$ in $p+3=p^2+2p-3$. & p^2+2p+2 in $p+3=p^3+5p^2+8p+6$. & p^3+15p^2+8p-6 in $p+3=p^4+8p^3+23p^2+18p-18$. & $p^4+8p^3+23p^2+18p-1=0$, quæ quærebatur.

Literalis

Literalis Æquationum affectarum Resolutio.

His in numeris sic ostensis: Sit Æquatio literalis $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$, resolvenda.

Primum inquiro valorem ipsius y cum x sit nulla, hoc est, elicio Radicem hujus Æquationis $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, & invenio esse $+ a$. Itaque scribo $+ a$ in Quotiente, & supponens $+ a + p = y$, substituo pro y valorem ejus, & Terminos inde resultantes ($p^3 + 3ap^2 + 4a^2p$, &c.) margini appono; Ex quibus assumo $+ 4a^2p + a^2x$ terminos utique ubi p & x seorsim sunt minimarum dimensionum, & eos nihilo fere æquales esse suppono, sive $p = -\frac{1}{4}x$ fere, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et scribens $-\frac{1}{4}x$ in Quotiente, substituo $-\frac{1}{4}x + q$ pro p; Et terminos inde resultantes iterum in margine scribo, ut vides in annexo schemate, & inde assumo Quantitates $+ 4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$, in quibus utiq; q & x seorsim sunt minimarum dimensionum, & fingo $q = \frac{xx}{64a}$ fere, sive $q = + \frac{xx}{64a} + r$; & adnectens $+ \frac{xx}{64a}$ Quotienti, substituo $\frac{xx}{64a} + r$ pro q; & sic procedo quo usque placuerit.

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} - \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \text{ \&c.}$$

$+ a + p = y$	$+ y^3$	$+ a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$
	$+ a^2y$	$+ a^3 + a^2p$
	$+ axy$	$+ a^2x + axp$
	$- 2a^3$	$- 2a^3$
	$- x^3$	$- x^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p$	$+ p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$
	$+ 3ap^2$	$+ \frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aq^2$
	$+ 4a^2p$	$- a^2x + 4a^2q$
	$+ axp$	$- \frac{1}{4}ax^2 + axq$
	$+ a^2x$	$+ a^2x$
	$- x^3$	$- x^3$
$+ \frac{x^2}{64a} + r = q$	$+ 3aq^2$	$+ \frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$
	$+ 4a^2q$	$+ \frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$
	$- \frac{1}{2}axq$	$- \frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$
	$+ \frac{3}{16}x^2q$	$- \frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}x^2r$
	$- \frac{1}{16}ax^2$	$- \frac{1}{16}ax^2$
	$- \frac{65}{64}x^3$	$- \frac{65}{64}x^3$

$$+ 4a^2 - \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{9}{32}x^2) + \tfrac{131}{128}x^3 - \tfrac{15x^4}{4096a} \left(+ \tfrac{131x^3}{512a^2} + \tfrac{509x^4}{16384a^3}\right.$$

Sin

Sin duplo tantum plures Quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: Primo termino (q^3) Æquationis novissime resultantis misso, & ista etiam parte ($-\frac{1}{4}xq^2$) secundi, ubi x est tot dimensionum quot in penultimo termino Quotientis; In reliquos terminos ($3aq^2 + 4a^2q$, &c.) margini adscriptos ut vides, substituo $\frac{x^2}{64a} + r$ pro q; & ex ultimis duobus terminis ($\frac{15x^4}{4096a} - \frac{131}{128}x^3 + \frac{15}{16}x^2r - \frac{1}{2}axr + 4a^2r$) Æquationis inde resultantis, facta divisione $4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{15}{16}x^2$) $+ \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}$ (elicio $+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ Quotienti adnectendos.

Denique Quotiens ista ($a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a}$, &c.) per Regulam secundam, dabit $ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2} + \frac{509x^5}{81920a^3}$, &c. pro Area quæsita, quæ ad veritatem tanto magis accedit, quanto x sit minor.

Alius modus easdem Resolvendi.

Sin valor Areæ tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x fit major; Exemplum esto $y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$. Itaque hanc resoluturus excerpo terminos $y^3 + x^2y - 2x^3$ in quibus x & y vel seorsim, vel simul multiplicatæ, sunt & plurimarum, & æqualium ubique dimensionum; & ex iis quasi nihilo æqualibus Radicem elicio. Hanc invenio esse x, & in Quotiente scribo. Vel quod eodem recidit, ex $y^3 + y - 2$ (unitate pro x substituta) Radicem extraho quæ hic prodit 1, & eam per x multiplico, & factum (x) in Quotiente scribo. Denique pono $x + p = y$, & sic procedo ut in priori Exemplo, donec habeam Quotientem $x + \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}$, &c. adeoque Aream $\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \left|\frac{aa}{64x}\right| - \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2}$ de qua vide exempla tertia Regulæ secundæ. Lucis gratia dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modo x & a sibi invicem ibi substituantur, ut non opus esset aliud Resolutionis exemplum hic adjungere.

Area autem ($\frac{xx}{2} - \frac{ax}{4} + \left|\frac{aa}{64x}\right|$ &c. terminatur ad Curvam quæ juxta Asymptoton aliquam in infinitum serpit; & Termini initiales ($x - \frac{1}{4}a$) valoris extracti de y, in Asymptoton istam semper terminantur; unde portionem Asymptoti facile invenies. Idem semper notandum est cum Area designatur terminis plus plusque divisis per x continue, præterquam quod vice Asymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola Conica, vel alia magis composita.

Sed

Sed hunc modum miſſum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem Curvis in orbem ad inſtar Ellipſium flexis; de altero modo per exemplum $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſupra oſtenſo (ſcilicet quo dimenſiones ipſius x in numeratoribus quotientis perpetuo augeantur) annotabo ſequentia.

1. Si quando accidit quod valor ipſius y, cum x nullum eſſe fingitur, ſit quantitas ſurda vel penitus ignota, licebit illam litera aliqua deſignare. Ut in exemplo, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſi radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3$ fuiſſet ſurda vel ignota, finxiſſem quamlibet (b) pro ea ponendam; & reſolutionem ut ſequitur perfeciſſem. Scribens b in Quotiente, ſuppono $b + p = y$, & iſtum pro y ſubſtituo, ut vides; unde nova $p^3 + 3bp^2$, &c. reſultat, rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo ſunt æquales, propterea quod b ſupponitur Radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2 + a^2}$ quotienti apponendum, & $-\frac{abx}{3b^2 + a^2} + q$ ſubſtituendum pro p, &c.

$$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0. \quad \text{Sit } cc = 3b^2 + a^2.$$

$$y = b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8} - \frac{a^5bx^3}{c^8} + \frac{a^5b^3x^3}{a^{10}}, \text{ \&c.}$$

$b + p = y$	$+ y^3$	$+ b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3$
	$+ axy$	$+ abx + axp$
	$+ aay$	$+ aab + aap$
	$- x^3$	$- x^3$
	$- 2a^3$	$- 2a^3$
$\frac{-abx}{cc} + q = p$	p^3	$- \frac{a^3b^3x^3}{c^6}$ &c.
	$+ 3bp^2$	$+ \frac{3a^2b^3x^2}{c^4} - \frac{6ab^2x}{c^2}q$, &c.
	$+ axp$	$- \frac{a^2bx^2}{c^2} + axq$
	$+ ccp$	$- abx + ccq$
	$- x^3$	$- x^3$
	$+ abx$	$+ abx$

$$c^2 + ax - \frac{6ab^2x}{cc}\Big) \frac{a^4bx^2}{c^4} + x^3 + \frac{a^3b^3x^3}{c^6} \Big(\frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8}, \text{ \&c.}$$

Completo opere, ſumo numerum aliquem pro a, & hanc $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, ſicut de numerali æquatione oſtenſum ſupra reſolvo; & radicem ejus pro b ſubſtituo.

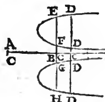
2. Si dictus valor ſit nihil, hoc eſt ſi in æquatione reſolvenda nullus ſit terminus niſi qui per x vel y ſit multiplicatus, ut in hac $y^3 - axy + x^3 = 0$; tum terminos $(-axy + x^3)$ ſeligo in quibus x ſeorſim & y etiam ſeorſim ſi fieri poteſt, alias per x multiplicata, ſit minimarum dimenſionum. Et illi dant $+ \frac{xx}{a}$ pro primo termino quotientis, & $\frac{xx}{a} + p$ pro y ſubſtituendum.

endum.

endum. In hac $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$, licebit primum terminum quotientis vel ex $-a^2y - x^3$, vel ex $y^3 - a^2y$ elicere.

3. Si valor iste sit imaginarius, ut in hac $y^4 + y^3 - 2y + 6 - x^2y^2 - 2x + x^2 + x^4 = 0$, augeo vel imminuo quantitatem x donec dictus valor evadat realis.

Sic in annexo schemate, cum AC (x) nulla est, tum CD (y) est imaginaria.



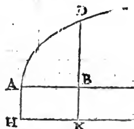
Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x; tum posito quod BC (x) sit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet potest esse primus terminus quotientis, prout superficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC desideratur. In aliis etiam casibus, si quando hæsitas, te hoc modo extricabis.

Deniq; si index potestatis ipsius x vel y sit fractio, reduco ipsum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$. Positio $y^{\frac{1}{2}} = v$, & $x^{\frac{1}{3}} = z$, resultabit $v^6 - z^3v + z^4 = 0$, cujus radix est $v = z + z^3$, &c. sive (restituendo valores) $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x$, &c. & quadrando $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}$, &c.

Et hæc de areis curvarum investigandis dicta sufficiant. Imo cum Problemata omnia de curvarum Longitudine, de quantitate & superficie solidorum, deque Centro Gravitatis, possunt eo tandem reduci ut quæratur quantitas Superficiei planæ linea curva terminatæ, non opus est quicquam de iis adjungere. In istis autem quo ego operor modo dicam brevissime.

Applicatio prædictorum ad reliqua istiusmodi Problemata.

Sit ABD curva quævis, & AHKB rectangulum cujus latus AH vel BK est unitas. Et cogita * rectam DBK uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK describere; & quod BK (1) sit momentum quo AK (x) & BD (y) momentum quo ABD gradatim augetur; & quod ex momento BD perpetim dato, possis, per prædictas regulas, aream ABD ipso descriptam investigare, sive cum AK (x) momento 1 descripta conferre.



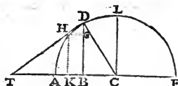
Jam qua ratione Superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per præcedentes regulas elicitur, eadem quælibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.

* N. B. Hic describitur Methodus per Fluentes & earum Momenta. Hæc Momenta a D. *Leibnitio* Differentiæ postmodum vocata sunt: Et inde nomen *Methodi Differentialis*.

Longitudine

Longitudines Curvarum invenire.

Sit ADLE circulus cujus arcus AD longitudo est indaganda. Ducto tangente DHT, & completo indefinite parvo rectangulo HGBK, & posito AE = 1 = 2AC. * Erit ut BK sive GH, momentum Basis AB (x), ad HD momentum Arcus AD :: BT : DT :: BD ($\sqrt{x-xx}$) : DC ($\frac{1}{2}$) :: 1 (BK) : $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ sive $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ est momentum Arcus AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Quare, per regulam secundam, longitudo Arcus AD est $x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$ &c. sive $x^{\frac{1}{2}}$ in $1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + \frac{63}{2816}x^5$, &c.



Non secus ponendo CB esse x, & radium CA esse 1, invenies Arcum LD esse $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c.

Sed notandum est quod unitas ista quæ pro momento ponitur est Superficies cum de Solidis, & linea cum de superficiebus, & punctum cum de lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate in punctis, sive lineis infinite parvis, siquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indivisibilium.

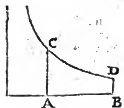
Ex his fiat conjectura de superficiebus & quantitatibus solidorum, ac de Centris Gravitatum.

Invenire prædictorum conversum.

Verum si e contra ex area vel longitudine &c. Curvæ alicujus data longitudo Basis AB desideratur, ex æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur radix de x.

Inventio Basis ex Area data.

Ut si ex area ABDC Hyperbolæ ($\frac{1}{1+x} = y$) data, cupiam basim AB investigare, area ista z nominata, extraho radicem hujus z (ABCD) $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis terminis in quibus x est plurium dimensionum quam z in quotiente desideratur.



Ut si, vellem quod z ad quinque tantum

* Exemplum calculi per Momenta fluentium.

dimensiones

dimenſiones in quotiente aſcendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8$, &c. & radicem hujus tantum $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-z=0$ extraho.

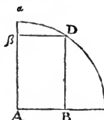
	$x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5$, &c.	
$z+p=x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4-z^3p$, &c.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3+z^2p+zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2-zp-\frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2+q=p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{2}z^2q$, &c.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4+z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3-zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2+q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1-z+\frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3-\frac{1}{8}z^4+\frac{1}{20}z^5\ (\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$		

Analyſin ut vides exhibui propter adnotanda duo ſequentia.

1. Quod inter ſubſtituendum, iſtos terminos ſemper omitto quos nulli deinceps uſui fore prævideam. Cujus rei regula eſto, quod poſt primum terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem non addo plures terminos dextrorſum quam iſtius primi termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ unitatibus diſtat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimenſio eſt 5, omiſi omnes terminos poſt z^5, poſt z^4 poſui unicum, & duos tantum poſt z^3. Cum radix extrahenda (x) ſit parium ubique, vel imparium dimenſionum, hæc eſto regula; Quod poſt primum terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem non addo plures terminos dextrorſum, quam iſtius primi termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ binis unitatibus diſtat; vel ternis unitatibus, ſi indices dimenſionum ipſius x unitatibus ubique ternis a ſe invicem diſtant, & ſic de reliquis.

2. Cum video p, q, vel r, &c. in æquatione noviſſime reſultante eſſe unius tantum dimenſionis, ejus valorem, hoc eſt, reliquos terminos quotienti addendos, per diviſionem quæro. Ut hic vides factum.

Inventio Basis ex data Longitudine Curvæ.



Si ex dato arcu αD Sinus AB desideratur; æquationis $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. supra inventæ, (posito nempe $AB = x$, $\alpha D = z$, & $A\alpha = 1$,) radix extracta erit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.

Et præterea si Cosinum Aβ ex isto arcu dato cupis, fac $A\beta\ (= \sqrt{1-xx}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c.

De Serie progressionum continuanda.

Hic obiter notetur, quod 5 vel 6 terminis istarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogia observata poteris ad arbitrium producere. Sic hanc $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c. produces, dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

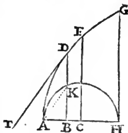
Et hanc $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$, &c. per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, 10×11, &c.

Et hanc $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6$, &c. per hos 1×2, 3×4, 5×6, 7×8, 9×10, &c.

Et hanc $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. multiplicando per hos $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times8}{8\times9}$, &c. Et sic in reliquis.

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

At hæc de Curvis Geometricis dicta sufficiant. Quinetiam Curva etiamsi Mechanica sit, methodum tamen nostram nequaquam respuit.



Exemplo sit Trochoides, ADFG, cujus vertex A, & axis AH, & AKH rota qua describitur. Et quæratur Superficies ABD. Jam posito $AB = x$, $BD = y$, ut supra, & $AH = 1$; primo quæro Longitudinem ipsius BD. Nempe ex natura Trochoidis est $KD =$ arcui AK. Quare tota $BD = BK +$ arc. AK. Sed est $BK\ (= \sqrt{x - xx}) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c. & (ex prædictis) arcus $AK = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota $BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, &c.

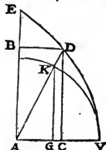
Vel brevius sic: Cum recta AK tangenti TD parallela sit, erit AB ad BK sicut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc est $x : \sqrt{x - xx} :: 1 : \frac{1}{x}\sqrt{x - xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}$, &c.

Quare

Quare (per Reg. 2.) $BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{576}x^{\frac{9}{2}}$, &c.

Et superficies $ABD = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{3168}x^{\frac{11}{2}}$, &c.

Non dissimili modo (posito C centro circuli, & $CB = x$) obtinebis aream CBDF, &c.



Sit area ABDV Quadratricis VDE(cujus vertex est V, & A centrum circuli interioris VK cui aptatur) invenienda. Ducta qualibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque KG : AG : : AB (x) : BD (y), sive $\frac{x \times AG}{KG} = y$. Verum ex natura Quadratricis est BA (= DC) = arcui VK, sive $VK = x$. Quare posito $AV = 1$, erit $GK = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c. ex supra ostensis, & $GA = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$, &c.

Adeoque $y \left(= \frac{x \times AG}{KG}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6}$, &c. sive, divisione facta, $y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6$, &c. & (per Reg. 2.) area $AVDB = x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliori, determinabilis est.

Nec quicquam hujusinodi scio ad quod hæc methodus, idque variis modis, sese non extendit. Imo tangentes ad Curvas Mechanicas (si quando id non alias fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id sit possibile) perficit, hæc per æquationes infinitas semper perficiat: Ut nil dubitaverim nomen Analysis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa sunt quam in illa, nec æquationes minus exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines & rationis finitæ nec designare neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exacte cognoscamus: Sicut radices surdæ finitarum æquationum nec numeris nec quavis arte Analytica ita possunt exhiberi, ut alicujus quantitas a reliquis distincta exacte cognoscatur.

Denique ad Analyticam merito pertinere conseatur, cujus beneficio Curvarum areæ & longitudines &c. (id modo fiat) * exacte & Geometrice determinentur. Sed ista narrandi non est locus. Respicienti duo præ reliquis demonstranda occurrunt.

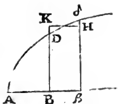
1. *Demonstratio quadraturæ curvarum simplicium in Regula prima.*

Præparatio pro Regula prima demonstranda.

† Sit itaque curvæ alicujus $AD\delta$ Basis $AB = x$, perpendiculariter applicata $BD = y$, & area $ABD = z$, ut prius. Item sit $B\beta = o$,

* N. B. Quadratura Curvarum per Æquationes infinitas, quæ nonnunquam terminantur & finitæ evadunt.

† Exemplum luculentum Calculi per momenta Fluentium.



BK $= v$, & rectangulum BβHK (ov) æquale ſpatio BβδD.

Eſt ergo A$\beta = x + o$, & Aδ$\beta = z + ov$. His præmiſſis, ex relatione inter x & z ad arbitrium aſſumpta quæro y iſto, quem ſequentem vides, modo.

Pro lubitu ſumatur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, ſive $\frac{4}{9}x^3 = zz$. Tum $x + o$ (Aβ) pro x, & $z + ov$ (Aδβ) pro z ſubſtitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 =$ (ex natura Curvæ) $z^2 + 2zov + o^2v^2$. Et ſublatis ($\frac{4}{9}x^3$ & zz) æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam ſupponamus Bβ in infinitum diminui & evaneſcere, ſive o eſſe nihil, erunt v & y æquales, & termini per o multiplicati evaneſcent, quare reſtabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, ſive $\frac{2}{3}xx$ $(=zy)$ $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, ſive $x^{\frac{1}{2}}$ $(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}) = y$. Quare e contra ſi $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Demonſtratio.

Vel generaliter, ſi $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; ſive, ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m + n = p$, ſi $cx^{\frac{p}{n}} = z$, ſive $c^n x^p = z^n$: tum $x + o$ pro x, & $z + ov$ (ſive, quod perinde eſt, $z + oy$) pro z, ſubſtitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, &c. $= z^n + noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe terminis, qui tandem evaneſcerent, omiſſis. Jam ſublatis $c^n x^p$ & z^n æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $c^n p x^{p-1} = nyz^{n-1}$ $(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}})$ ſive dividendo per $c^n x^p$, erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$, ſive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel reſtituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m + n$ pro p, hoc eſt, m pro $p - n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare e contra, ſi $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

Inventio Curvarum quæ poſſunt quadrari.

Hinc in tranſitu notetur modus quo curvæ tot quot placuerit, quarum areæ ſunt cognitæ, * poſſunt inveniri; ſumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z & baſin x, ut inde quæratur applicata y. Ut ſi ſupponas $\sqrt{aa+xx} = z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}} = y$. Et ſic de reliquis.

* Hac Propoſitione ex æquatione Fluentes involvente inveniuntur Fluxiones.

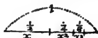
2. Demon-

2. *Demonstratio resolutionis æquationum affectarum.*

Alterum demonstrandum est literalis æquationum affectarum resolutio. Nempe quod Quotiens, cum x sit satis parva, quo magis producitur eo magis ad veritatem accedit, ut defectus (p, q, vel r, &c.) quo distat ab exacto valore ipsius y, tandem evadat minor quavis data quantitate; & in infinitum producta sit ipsi y æqualis. Quod sic patebit.

1. Quoniam ex ultimo termino æquationum quarum p, q, r, &c. sunt radices, quantitas illa in qua x est minimæ dimensionis (hoc est, plusquam dimidium istius ultimi termini, si supponis x satis parvam esse) in qualibet operatione perpetuo tollitur: iste ultimus terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quavis data quantitate; & prorsus evanescet si opus infinite continuatur.

Nempe si $x = \frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x + x^2 + x^3 + x^4$, &c. Et x^2 dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, &c. Itaque si $x \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + x^2 + x^3$, &c. Et x^2 plusquam dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4$, &c. Sic si $\frac{x}{b} \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{bb}$, &c. Et sic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decrescunt perpetuo, vel si quando increscant, tantum opus est ut x aliquoties adhuc minor supponatur.



2. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuo diminuatur donec tandem evanescat, una ex ejus radicibus etiam diminuetur donec cum ultimo termino simul evanescat.

3. Quare quantitatum p, q, r, &c. unus valor continuo decrescit donec tandem, cum opus in infinitum producitur, penitus evanescat.

4. Sed valores istarum p, q, vel r, &c. una cum quotiente eatenus extracta adæquant radices æquationis propositæ (Sic in resolutione æquationis $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$ supra ostensa, percipies $y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + r$, &c.) Unde satis liquet propositum quod quotiens infinite producta est una ex valoribus de y.

Idem patebit substituendo quotientem pro y in æquatione proposita. Videbis enim terminos illos sese perpetuo destruere in quibus x est minimarum dimensionum.

Excerpta

Excerpta ex Epistola D. Oldenburgh *ad D.* Renatum Franciscum Slusium *Canonicum* Leodiensem, *Anno* 1669, 14 Septembris St. vet. *datâ: cujus Apographum conspicitur in Libro* Societatis Regiæ, *quo conservantur Epistolæ, N°. 3. pag.* 174.

INsuper communicavit ille [*Barrovius*] universalem Methodum Analyticam, ipsi transmissam a D. *Isaaco Newtono*, inservientem mensurandis Areis omnium ejusmodi Curvarum, & earundem Perimetrorum, in quibus Ordinatæ eandem habet communem habitudinem ad Basin: Hæcque methodus alia non est ab illa, quam particulariter applicuit D. *Mercator* ad inveniendas areas Hyperbolæ, universalis reddita. Auctor sic incipit.

" *De Analysi per Æquationes numero terminorum infinitas.*

" Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam
" terminorum seriem mensuranda, olim excogitaveram, &c.

Et postquam ejus beneficio ostendit complurium Curvarum Quadraturam, accedit ad Circulum; & convertendo $\sqrt{aa+bb}$, vel $\sqrt{aa-bb}$ in Seriem infinitam, ostendit complures ejusmodi Series applicari posse ad Circulum, adeo ut datis horum quibuslibet duobus; Radio nempe, Sinu, Arcu, & Area Segmenti, reliquorum quodvis inveniri possit infinite verum: (res ni fallor ab omnibus Auctoribus prægressis valde expetita) Ejusdem etiam adminiculo eximie facilitavit inventionem Radicis Æquationis cujuslibet, & mediarum Proportionalium; & Seriem largitur ad inveniendam lineæ Ellipticæ longitudinem. Similiter, ut ostenderet methodum suam ad Curvas mechanicas earumque Tangentes se porrigere, quadrat Cycloidem ejusque portiones; Areamque curvæ Quadratricis, ejusque Perimetrum invenit: Atque ad calcem sic ait.

" Nec quicquam hujusmodi scio ad quod hæc Methodus, idq; variis
" modis, sese non extendat. Imo Tangentes ad Curvas mechanicas (si quan-
" do id non alias fiat) hujus ope ducuntur. Et quicquid vulgaris Analysis
" per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id fit
" possibile) perficit, hæc per Æquationes infinitas semper perficiat.
" Et hæc de Areis Curvarum investigandis dicta sufficiant. Imo cum Pro-
" blemata de Curvarum Longitudine, de quantitate & Superficie Solido-
" rum, deq; Centro Gravitatis, possunt eo tandem reduci ut quæratur
" quantitas Superficiei planæ linea curva terminatæ, non opus est quic-
" quam de iis adjungere.

Ex Epistola D. Collins *ad D.* Jacobum Gregorium *Anno* 1669, 25 Novemb. *datâ. Quæ quidem Epistola, manu dicti D.* Collins *descripta, conservata est.*

BArrovius provinciam suam publice prælegendi remisit cuidam nomine *Newtono* Cantabrigiensi, cujus, tanquam viri acutissimo ingenio præditi, in Præfatione Prælectionum Opticarum, meminit: quique antequam ederetur *Mercatoris* Logarithmotechnia, eandem Methodum adinvenerat, eamque ad omnes Curvas generaliter, & ad Circulum diversimode, applicarat.

Ex Epistola D. Jacobi Gregorii *ad D.* J. Collins, *ad Fanum St.* Andreæ *apud* Scotos *Anno* 1670, 20 Aprilis *datâ, prout in Autographo ipsius* Gregorii *legitur.*

SEriem a te missam de Circuli Zona intelligere nequeo, nempe $2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7}$ — &c. Si hæc recte descripta sit, Seriem legitimam non esse suspicor.

Ex Epistola ejusdem Gregorii *ad eundem, Anno* 1670, 5 Septemb. *data.*

BArrovii [Geometricas] Lectiones summa cum voluptate & attentione perlegi; atq; omnes qui unquam hisce de rebus scripserunt infinito intervallo superasse comperio. Ex ejusdem [*Barrovii*] methodis Tangentes ducendi cum quibusdam e propriis collatis, inveni Methodum generalem & Geometricam ducendi Tangentes ad omnes Curvas sine calculo; & quæ complectitur non tantum *Barrovii* Methodos particulares, sed & ipsius generalem Methodum Analyticam, quam habes sub finem Lectionis decimæ. Methodus mea haud pluribus quam duodecim continetur Propositionibus.

Ex Epiſtola ejuſdem ad eundem Anno 1670, 23 Novemb. *data, cujus etiam conſervatur Autographon.*

PLurimæ approximationes pro Circuli Segmentis ex his facile elici poſſunt; at vix operæ pretium erit, cum poteſtates alternas tollere nequeo, quod factum eſt a D. *Newtono* in ſua Serie, modo Series ſit: (nam ut dicam quod ſentio, ad nullam mearum reducere poſſum) Autumo tamen meam pari facilitate & brevitate rem confecturam.

Ex Autographo D. Jacobi Gregorii *ad eundem D.* Collins, *de Fano St.* Andreæ, 19 Decembris *ejuſdem Anni, miſſo.*

QUum poſtremas ad te dedi literas, nondum animadvertiſſem D. *Newtoni* Seriem de Circuli Zonis (quam jam dudum ad me miſiſti) una cum Infinito iſtiuſmodi Serierum numero, Conſectarium illius eſſe poſſe, quam miſi de Logarithmis: nempe, Dato Logarithmo invenire ejus Numerum; vel radicem Poteſtatis cujuſcunq; puræ in infinitam ſeriem permutare. Me ſane tam tardi fuiſſe ingenii miror, qui tanto temporis ſpatio hoc non animadverteram, quum tamen multum olei & operæ in iſta Serie expiſcanda impenderam. At ut ingenue fatear, ſemper in animum induxeram, ſi modo Series eſſet, me in eam incidere poſſe, ope aliquarum e Seriebus meis pro Circulo inter ſe combinatis, quarum quidem plurimas ad manus habeo; neque ullam aliam deſideraram Methodum. Series tua paululum producta ſit $2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5R^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \frac{21B^{13}}{6656R^{11}} - \frac{11B^{15}}{5120R^{13}} -$ &c. Eiſdem etiam poſitis, erit Arcus (cujus Sinus B) $= B + \frac{B^3}{6R^2} + \frac{3B^5}{40R^4} + \frac{5B^7}{112R^6} + \frac{35B^9}{1152R^8} +$ &c. Plures hujuſcemodi Series proferre poſſem; ſed Tu fortaſſe plus meipſo de his rebus noſti.

Ex

Ex Epistola D. Collins *ad dictum D.* Gregorium, 24 Decembris *Anno* 1670 *data: cujus habetur Exemplar manu ipsius* D. Collins *descriptum.*

QUum D. *Dary* * Miscellanea sua in lucem edidit, exemplar libelli misit ad D. *Newtonum*, qui dictum D. *Dary* Serie pro Area Zonæ Circuli, quam ad te misi, remuneravit; quæ sine omni dubio Series est legitima & eximia: Ope D. *Barrovii* nonnullas alias Series e Methodo *Newtoni* generali derivatas obtinui; easque conserto colloquio deprehendi Analytice deduci posse e datis cujusvis Figuræ proprietatibus; & multas Series ad singulas Figuras applicari posse. Universalem quoque esse, cujusque ope omnes Quadraturas perfici possis, tam Curvarum quas *Cartesius* Geometricas esse admittit, quam earum quas censet Mechanicas.

Hac itaq; methodo Curvæ omnium Figurarum communi proprietate definitarum rectificantur, earum Tangentes & Centra Gravitatis inveniuntur; item Rotunda earum Solida & Segmenta secunda cubantur; & in universis Curvis, Longitudine curvilinea data, ordinatim applicatæ inveniuntur, & vice versa.

Exempla quædam.

Arcu z dato, invenire Sinum x vel Co-sinum y; posita Unitate pro Radio.

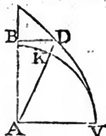
$$x = z - \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{120}z^5 - \tfrac{1}{5040}z^7 + \tfrac{1}{362880}z^9 - \&c.$$

$$y = 1 - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{24}z^4 - \tfrac{1}{720}z^6 + \tfrac{1}{40320}z^8 - \tfrac{1}{3628800}z^{10} + \&c.$$

Et dato Sinu x, invenire z. $z = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \&c.$

Quadratricem Veterum quod attinet, nulla Methodus, nullus Geometra ejus Aream exhibere valuit. Sit igitur AV Radius circuli inscripti Unitas, & VK Arcus x, erit Area BDVA

$$= x - \tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{225}x^5 - \tfrac{4}{13230}x^7 - \&c.$$



Tractatum hac de re scripsit, in quo inventio longitudinis totius vel datæ partis Curvæ *Ellipticæ*, & *Quadratricis* DV, nec non Areæ supradictæ, est inter Exempla.

* N. B. Miscellanea edidit D. *Michael Dary*, Anno 1669.

Ex Epistola D. Jacobi Gregorii *ad D.* Collins, 15 *Februarii Anno* $167\frac{2}{3}$ *data, cujus habetur Autographon.*

Ex quo Epistolam ad te dedi, tres a te accepi, unam *Decemb.* 15. alteram *Dec.* 24. tertiam 21. *Januarii* nuper elapsi datam.

Quod attinet *Newtoni* Methodum universalem, aliqua ex parte, ut opinor, mihi innotescit, tam quoad Geometricas quam Mechanicas Curvas. Nihilo tamen minus ob Series ad me missas gratias habeo, quas ut remunerem mitto quæ sequuntur.

Sit Radius $= r$, Arcus $= a$, Tangens $= t$, Secans $= s$,

Et erit $a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8}$, &c.

Eritq; $t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8}$ &c.

Et $s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7}$ &c.

Sit nunc Tangens artificialis $= t$, & Secans artificialis $= s$, & integer quadrans $= q$,

Erit $s = \frac{a^2}{r} + \frac{a^4}{12r^3} + \frac{a^6}{45r^5} + \frac{17a^8}{2520r^7} + \frac{62a^{10}}{28350r^9}$ &c.

Sit $2a - q = e$, & erit $t = e + \frac{e^3}{6r^2} + \frac{e^5}{24r^4} + \frac{61e^7}{5040r^6} + \frac{277e^9}{72576r^8}$ &c.

Sit nunc Secans artificialis 45 *gr.* $= s$, sitq; $s + l$ Secans artificialis ad libitum, erit ejus Arcus $= \frac{1}{2}q + l - \frac{l^2}{r} + \frac{4l^3}{3r^2} - \frac{7l^4}{3r^3} + \frac{14l^5}{3r^4} - \frac{452l^6}{45r^5}$ &c.

eritq; $2a - q = t - \frac{t^3}{6r^2} + \frac{t^5}{24r^4} - \frac{61t^7}{5040r^6} + \frac{277t^9}{72576r^8}$ &c.

Hic animadvertendum est Radium artificialem esse 0; & ubi inveneris q majorem quam $2a$, sive artificialem Secantem 45 *gr.* majorem esse data Secante, mutanda esse Signa, & pergendum secundum vulgaris Algebræ præcepta.

Sit Ellipsis cujus alter Semiaxium $= r$, alter $= c$; ex quolibet Curvæ Ellipticæ puncto demittatur in Semiaxem r recta perpendicularis $= a$: erit Curva Elliptica perpendiculari a adjacens $= a + \frac{r^2a^3}{6c^4} + \frac{4r^2c^2a^5 - r^4a^5}{40c^8} + \frac{8c^4r^2a^7 + r^6a^7 - 4c^2r^4a^7}{112c^{12}} + \frac{64c^6r^2a^9 - 48c^4r^4a^9 + 12c^2r^6a^9 - 5r^8a^9}{1152c^{16}}$ &c.

Si determinetur Ellipseos species, Series hæc simplicior evadet. Ut si $c = 2r$, foret Curva prædicta $= a + \frac{a^3}{96r^2} + \frac{3a^5}{2048r^4} + \frac{113a^7}{458752r^6} + \frac{3419a^9}{75497472r^8}$ &c.

H Reliquis

Reliquis vero manentibus, si Curva prædicta esset Hyperbola, prædicta quoq; Series ei inserviret, si modo omnium terminorum partes affirmentur, & negentur totus terminus tertius, totus quintus, septimus &c. in locis imparibus.

Gratias ago maximas, tam ob benevolentiam qua mones de meditatis meis publicandis, quam ob perhumanas tuas pollicitationes. Nollem tantam molestiam tibi creare, neque mihi in animo est quicquam edere, præterquam Quadraturam meam Circuli recusam, additis quibusdam augmentis. Quod attinet Methodum meam inveniendi Radices omnium Æquationum; una series unam tantum prodit Radicem, at pro qualibet radice infinitæ sunt series. Industria autem aliqua opus est ad seriem rite incipiendam, & ad quam pertineat radicem dignoscendam. Verum hac de re fusius forsan aliquando ad te scribam. Non est quod metuas cuiquam quicquid miserim communicare, parum enim solicitus sum, utrumne meo an alieno nomine in publicum prodeat.

Ex Epistola D. Collins *ad D.* Bertet *Parisiis tum agentem. Data autem est* 21 Februarii, *Anno* 1670/1; *ejusq; exemplar manu ipsius D.* Collins *exaratum conservatur.*

SYstema Algebræ integrum componere opus est eximium, & dignum cui ab omnibus faveatur; præcipue, vero quia quatuor circiter abhinc annis inventa fuit a D. *Isaaco Newtono* Methodus Analytica generalis, pro Quadratura omnium Spatiorum Curvilineorum, tam in Curvis Geometricis quam Mechanicis communi aliqua proprietate gaudentibus. Hujus ope, quicquid a Quadraturis pendet, peragitur, ut Rectificatio Curvarum, Inventio Tangentium & Centrorum Gravitatis, rotundorumq; Solidorum, & eorundem Segmentorum secundorum & curvarum Superficierum dimensuratio: (non autem Superficierum Solidorum quorum Axes inclinantur, uti Parabolicorum Conoidum, &c. hæc maner difficultas posteris superanda.) Hæc omnia peraguntur approximando verum in infinitum, absq; Radicum extractione, ope infinitæ Seriei rationalium, cujusmodi multæ ad unam eandemq; Figuram diversimode applicari possunt; v. g. ad Circulum, una ad inveniendam Aream totius vel partis cujusvis; alia ad inscriptas, alia ad adscriptas &c: Ita ut dato Sinu, Tangente vel Secante, inveniri potest longitudo Arcus, & vice versa, ope diversarum Seriesum ad eam rem appropriatarum. Unde fit ut jam calculo facilior inventu sit Arcus e Sinu dato, & vice versa, quam e Sinu dato Sinus dupli Arcus. Universim autem hoc nihil aliud est quam metho-

dus

dus a *Mercatore* usurpata, in ejus Logarithmotechnia ad Hyperbolam quadrandam, generalis reddita —— D. *Jacobus Gregorius* apud *Scotos* nuperrime incidit in eandem methodum.

Ex Epistola D. J. Collins *in Italiam ad D.* Alphonsum Borellum *missa; & mense Decembri Anno* 1671 *data: cujus habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.*

Kinckhuysenii Introductio ad Analysim Speciosam, quam *Stel-konst* vocat, a D. *Isaaco Newtono* prælo parata est, qui jam Mathematices Professor apud Cantabrigienses factus est. Huic adjunget ipsius Methodum generalem Quadraturarum Analyticam, cujus ope calculo eruit omnium Curvilinearum Figurarum regularium, communi aliqua proprietate gaudentium, Aream, earundem Curvarum Rectificationem, inventionem Centrorum gravitatis earum; itemq; rotunda Solida & Superficies eorum rotatione genita; & Secunda istorum Solidorum Segmenta: imo dato quovis Logarithmico Sinu, Tangente vel Secante in Canone, invenire licet Arcum ei competentem, absq; naturali Sinu, Tangente vel Secante prius invento, & vice versa; idq; generaliter, sine ulla Radicum extractione.

Hujus Specimen pro Circulo apposui.

N. B. *In hujus Epistolæ exemplari, locus vacuus Seriei interserendæ hic relictus fuit.*

Ex Epistola ejusdem D. Collins *ad D.* Franciscum Vernon *Anglum Parisiis tum agentem,* Londini 26 *Decembris Anno* 1671 *data: cujus habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.*

D. *Barrovius* certiorem me facit D. *Newtonum* pene adornasse *Kinckhuysenii* ad Algebram Introductionem (cujus hic brevi edendæ negotium mihi curæ erit) eamq; de propria ipsius penu auctiorem reddidisse. Huic subjiciet generalem * suam infinitarum Serierum metho-

---

N. B. * *Hic Tractatus unus idemq; est ac ille, cujus mentionem fecerat D.* Newtonus *in Epistola Octob.* 24. 1676. *data, per D.* Oldenburgum *D.* Leibnitio *communicata; & in quo methodi Serierum infinitarum & Fluxionum simul explicabantur, ut ibi loci memorat.*

dum

dum Analyticam, cujus ope computantur omnium Spatiorum curvilineorum Areæ, tum Geometricorum tum eorum quæ ex mente *Cartesii* Mechanica sunt,(modo Figuræ una aliqua aut pluribus communibus proprietatibus definitæ sint) ipsarumq; Curvarum longitudines, Centra Gravitatis, rotunda Solida & Superficies eorum rotatione genitæ. Hinc etiam eruuntur multæ pro Circulo Series; necnon quovis numero dato, tanquam Logarithmico Sinu, Tangente vel Secante, calculo perfacili, sine ulla Radicum extractione, sine ullis Tabulis, inveniri potest Arcus ei respondens, & vice versa; idq; vero quantum velis proxime, absq; naturali Sinu, Tangente, aut Secante prius invento: tot tantisq; commodis fœta est hæc Doctrina, de qua non nisi comperta loquor! Una cum his mittet viginti Lectiones ejus Opticas, quas D. *Barrovius* opus censet quo majus præsens ætas vix protulit. Admonui maturandam ideo esse ejus impressionem, quoniam D. *Hugenius* tractatum de Dioptrica & de Curvarum evolutione jam molitur. Ille autem contra, se magis cupere, ut accepto harum rerum nuncio, *Hugenius* potius excitaretur quam tardaretur; ratus minime verisimile utriusq; Hypotheses vel deductiones easdem esse posse.

Ex Epistola D. J. Collins *ad D* Thomam Strode, *26 Julii Anno 1672 data: cujus habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.*

QUod Geometriam curvarum figurarum spectat; hanc tandem generaliter ad Calculum Analyticum reduci posse, omnino Orbi literato novum atq; inauditum est. Hujus æquationes sunt Series terminis numero infinitis conflatæ (quorum tamen pauci sufficiunt communiter) ex notis Curvarum proprietatibus erutæ. Auctorem quod attinet, hujusq; methodi præstantiam, hæc accipe.

Mense *Septembri* 1668, *Mercator* Logarithmotechniam edidit suam, quæ specimen hujus Methodi (*i. e.* Serierum Infinitarum) in unica tantum Figura, nempe Quadraturam Hyperbolæ continet. Haud multo post quam in publicum prodierat liber, exemplar ejus Cl. *Wallisio Oxoniam* misi, qui suum de eo judicium in *Actis Philosophicis* statim fecit: aliumq; *Barrovio Cantabrigiam*, qui quasdam *Newtoni* chartas (qui jam *Barrovium* in Mathematicis Prælectionibus publicis excipit) extemplo remisit: E quibus & ex aliis, quæ olim ab Auctore cum *Barrovio* communicata fuerant, patet illam Methodum a dicto *Newtono* aliquot annis antea excogitatam & modo universali applicatam fuisse: ita ut ejus ope in

quavis Figura Curvilinea proposita, quæ una vel pluribus Proprietatibus definitur, Quadratura vel Area dictæ Figuræ, accurata si possibile sit, sin minus infinite vero propinqua; Evolutio vel longitudo lineæ curvæ; Centrum gravitatis Figuræ; Solida ejus rotatione genita, & eorum Superficies; sine ulla Radicum Extractione obtineri queant.

Postquam intellexerat D. *Gregorius* hanc methodum, a D. *Mercatore* in *Logarithmotechnia* usurpatam, & *Hyperbolæ* quadrandæ adhibitam, quamq; adauxerat ipse *Gregorius*, jam universalem redditam esse, omnibusq; Figuris applicatam; acri studio eandem acquisivit, multumq; in ea enodanda desudavit.

Uterq; D. *Newtonus* & *Gregorius* in animo habet hanc methodum exornare: D. *Gregorius* autem D. *Newtonum* primum ejus Inventorem anticipare haud integrum ducit.

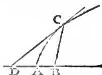
Ex Epistola D. Collins *ad D.* Newtonum 30 *Julii Anno* 1672 *data, cujus habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.*

PArandis Seriebus pro extrahendis radicibus in Speciebus [Algebraicis] ad modum *Vietæ* [in Numericis] credo D. *Gregorium* haud modicam impendisse operam: nihil autem de ea re scribere suscipiet, antequam Tu, methodi hujus repertor, proprias de ea lucubrationes in lucem emiseris; sed aliis rebus per interim intentus est.

Ex Epistola D. Newtoni *ad D.* Collins, *Anno* 1672, 10 *Decembris data. Repertum autem est ipsius* Newtoni *Autographum in scriniis D.* Collins, *una cum ejusdem exemplari manu D.* Collins *descripto.*

EX animo gaudeo D. *Barrovii* amici nostri reverendi lectiones Mathematicis exteris adeo placuisse, neq; parum me juvat intelligere eos [*Slusium* & *Gregorium*] in eandem mecum incidisse ducendi Tangentes Methodum. Qualem eam esse conjiciam ex hoc exemplo percipies. Pone CB applicatam ad AB, in quovis angulo dato, terminari ad quamvis Curvam AC, & dicatur AB x & BC y, habitudoq; inter x & y ex-

y exprimatur qualibet æquatione, puta $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = 0$, qua ipsa determinatur Curva. Regula ducendi Tangentem hæc est; multiplica æquationis terminos per quamlibet progressionem arithmeticam juxta dimensiones y, puta $\underset{0}{x^3} - \underset{1}{2xxy} + \underset{0}{bxx} - \underset{0}{bbx} + \underset{2}{byy} - \underset{3}{y^3}$; ut & juxta dimensiones x, puta $\underset{3}{x^3} - \underset{2}{2xxy} + \underset{2}{bxx} - \underset{1}{bbx} + \underset{0}{byy} - \underset{0}{y^3}$. Prius productum erit Numerator, & posterius divisum per x Denominator Fractionis, quæ exprimet longitudinem BD, ad cujus extremitatem D ducenda est Tangens CD: est ergo longitudo BC $= \frac{-2xxy + 2byy - 3y^3}{3xx - 4xy + 2bx - bb}$.



Hoc est unum particulare, vel corollarium potius Methodi generalis, quæ extendit se, citra molestum ullum calculum, non modo ad ducendum Tangentes ad quasvis Curvas, sive Geometricas, sive Mechanicas, vel quomodocunq; rectas lineas aliasve Curvas respicientes; verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, centris Gravitatis Curvarum, *&c.* Neq; (quemadmodum *Huddenii* methodus de *Maximis* & *Minimis*) ad solas restringitur æquationes illas, quæ quantitatibus surdis sunt immunes.

Hanc methodum intertexui alteri isti, qua Æquationum Exegesin instituo, reducendo eas ad Series infinitas. Memini me ex occasione aliquando narrasse D. *Barrovio*, edendis Lectionibus suis occupato, instructum me esse hujusmodi methodo Tangentes ducendi: Sed nescio quo diverticulo ab ea ipsi describenda fuerim avocatus.

Slusii Methodum Tangentes ducendi brevi publice prodituram confido: quamprimum advenerit exemplar ejus ad me transmittere ne grave ducas.

Epistola D. Slusii *ad D.* Oldenburgh, *Anno* $167\frac{2}{3}$, 17 *Januarii* Leodii *data, qua continetur methodus ejus ducendi Tangentes, inter Epistolas Regiæ Societatis asservatur Lib. N°. 6. pag.* 11. *Legitur autem impressa in Transactionibus Philosophicis N°.* 90.

Ex

Ex Epiſtola D. Oldenburgh *ad D.* Sluſium, *Anno* $167\frac{2}{3}$, 29 *Januarii data, qua prædictis* Sluſii *literis reſpondetur. Legitur autem exemplar ejus in libris Regiæ Societatis N°. 6. pag.* 27.

STatui, deo dante, prima occaſione Methodum ipſam, prout Epiſtola tua continetur, Tranſactionibus Philoſophicis inſerere. Non ingratum interea fuerit accipere quæ Doctiſſimus noſter *Newtonus*, in Academia *Cantabrigienſi* Mathematum Profeſſor, de eodem argumento ad D. *Collinium* noſtrum, qui te ſummopere & jugiter colit, nuper perſcripſit in hæc verba.

" Non parum me juvat intelligere, Mathematicos exteros in eandem
" mecum incidiſſe ducendi Tangentes methodum. Qualem eam eſſe con-
" jiciam ex hoc exemplo percipies. *Atq; ita deinceps ut in præcedente ip-*
" *ſius* Newtoni *Epiſtola habetur.*

Hactenus *Newtonus*, quæ ideo nunc perſcribo ut cum noviſſimis tuis comparare poſſis.

Epiſtola D. Sluſii *ad D.* Oldenburgh, *Anno* 1673, 3 *Maii* Leodii *data, qua continentur fundamenta Methodi Tangentium* Sluſianæ, *cujuſque aſſervatur exemplar in libris Epiſtolarum Reg. Societatis N°. 6. pag.* 111. *impreſſa legitur in Phil. Tranſact. N°.* 95.

Ex Epiſtola D. Oldenburgh *ad D.* Sluſium, *Anno* 1673, 10 *Julii data. Legitur autem inter Epiſtolas Regiæ Societatis, Lib.* 6. *pag.* 196.

EN tibi, Vir illuſtriſſime, impreſſum modum tuum demonſtrandi methodum tuam ducendi Tangentes ad quaslibet Curvas, quemadmodum poſtremis tuis literis eum mihi communicaveras: Subticui viri nomen

men

men offenſionis evitandi cauſa. Scripſit mihi D. *Newtonus* in hanc ſententiam.

“ Ex priori tua Epiſtola ſubdubitabam, exiſtimaretne celeberrimus
“ *Sluſius* per ea, quæ ipſi de me ſcripſeras, me mihi tribuere methodum
“ ipſius ducendi Tangentes; donec intelligerem a D. *Collinio*, te ipſi
“ ſignificaſſe, eam, ex opinione tua, ſerius hic inventam fuiſſe. Tibi
“ quippe videtur, eam D. *Sluſio* perſpectam fuiſſe aliquot annis priuſ-
“ quam ederet Meſolabum ſuum, proindeq; antequam ego eam intel-
“ ligerem. At ſi res ſecus ſe haberet, cum tamen eam primus com-
“ municaverit amicis ſuis & literato orbi, jure merito ipſi debetur.
“ Quoad methodos illas, eædem ſunt, quanquam, crediderim, ex prin-
“ cipiis diverſis derivatæ. Neſcio tamen num ipſius principia eam lar-
“ giantur adeo generalem ac mea; quæ ad æquationes terminis ſurdis
“ affectas ſe extendunt, abſq; eorum ad alium formam reductione.

Hæc ille, quæ in bonam partem a te acceptum iri confido.

Excerpta ex Epiſtola D. Gothofredi Guilielmi Leibnitii *ad D.* Oldenburgh, *Londini, Anno* $167\frac{2}{3}$, 3 *Feb. data. Hujus Autographon in ſcriniis Regiæ Societatis extat, & exemplar ejus in lib. Epiſt. dictæ Societatis N°. 6. pag.* 53 *deſcriptum legitur.*

CUM heri apud illuſtriſſimum *Boylium* incidiſſem in clariſſimum *Pellium* Mathematicum inſignem, ac de Numeris incidiſſet mentio, commemoravi ego, ductus occaſione Sermonum, eſſe mihi methodum ex quodam differentiarum genere, quas voco generatrices, colligendi terminos Seriei cujuſcunq; continue creſcentis vel decreſcentis. Differentias autem generatrices voco, ſi datæ Seriei inveniantur differentiæ, & differentiæ differentiarum, & ipſarum ex differentiis differentiarum differentiæ *&c.* & ſeries conſtituatur ex termino primo & prima differentia, & prima differentia differentiarum, & prima differentia ex differentiis differentiarum *&c.*] ea Series erit differentiarum generatricium, ut ſi Series continue creſcens vel decreſcens fuerit *a*, *b*, *c*, *d*.

Poſita $\backsim$ *differentiæ Nota,*] differentiæ generatrices erunt.

1 a . 2 $a \backsim b$. 3 $\overline{a \backsim b} \backsim \overline{b \backsim c}$. 4 $\overline{\overline{a \backsim b} \backsim \overline{b \backsim c}} \backsim \overline{\overline{b \backsim c} \backsim \overline{c \backsim d}}$

4 a

4		$\overline{\overline{a \backsim b \backsim b \backsim c}}$		$\backsim$	$\overline{\overline{b \backsim c \backsim c \backsim d}}$		
3		$a \backsim b \backsim b \backsim c$			$b \backsim c \backsim c \backsim d.$		
2		$a \backsim b$		$b \backsim c$		$c \backsim d$	
1	a		b		c		d

Aut in Numeris; si Series sit Numerorum cubicorum deinceps ab unitate crescentium, differentiæ generatrices erunt numeri 0, 1, 6, 6. Voco autem generatrices, quia ex iis certo modo multiplicatis producuntur termini Seriei; cujus usus tum maxime apparet, cum differentiæ generatrices sunt finitæ; termini autem Seriei infiniti; ut in proposito exemplo Numerorum Cubicorum.

					o		o		o			
				6		6		6		6		
			6		12		18		24		30	
		1		7		19		37		61		91
0		1		8		27		64		125		216

Hoc cum audisset clarissimus *Pellius* respondit, id jam fuisse in literas relatum a D. *Mouton* Canonico *Lugdunensi*, ex observatione nobilissimi viri *Francisci Regnaldi Lugdunensi*, dudum in literario Orbe celebri, in libro laudati D. *Mouton* de diametris apparentibus Solis & Lunæ. Ego qui ex Epistola quadam a *Regnaldo* ad *Monconisium* scripta, & Diario itinerum *Monconisiano* inserta, nomen D. *Moutoni* & designata ejus duo didiceram; Diametros Luminarium apparentes, & consilium de mensuris rerum ad posteros transmittendis; ignorabam tamen librum ipsum prodiisse: quare apud D. *Oldenburgium Societatis Regalis* Secretarium, sumtum mutuo tumultuarie percurri, & inveni verissime dixisse *Pellium*. Sed & mihi tamen dandam operam credidi, ne qua in animis relinqueretur suspicio, quasi tacito inventoris nomine alienis meditationibus honorem mihi quærere voluissem; & spero appariturum esse, non adeo egenum me meditationum propriarum ut cogar alienas emendicare. Duobus autem

argumen-

argumentis ingenuitatem meam vindicabo. Primo si ipsas Schedas meas confusas, in quibus non tantum inventio mea sed & inveniendi modus occasioq; apparet, monstrem: deinde si quædam momenti maximi *Regnaldo Moutonoq*; indicta addam, quæ ab hesterno vespere confixisse me non sit verisimile, quæq; non possunt facile expectari a Transcriptore.

Ex Schedis meis occasio inventi hæc apparet: quærebam modum inveniendi differentias omnis generis potestatum, quemadmodum constat differentias Quadratorum esse numeros impares; inveneramque regulam generalem ejusmodi.

Data potentia gradus dati præcedente, invenire sequentem (vel contra) distantiæ datæ vel radicum datarum; seu invenire potentiarum gradus dati utcunq; distantium differentias. Multiplicetur potentia gradus. proxime præcedentis radicis majoris per differentiam radicum; & differentia potentiarum gradus proxime præcedentis multiplicetur per radicem minorem: productorum summa erit quæsita differentia potentiarum, quarum radices sunt datæ. Eandem regulam ita inflexeram, ut sufficiret, præter radices, cujuslibet gradus, etiamsi non proxime præcedentis, potentias datarum radicum dari, ad differentias potentiarum alterius cujuscunq, licet altioris gradus inveniendas. Et ostendi quod in Quadratis observatur, numeros impares esse eorum differentias, id non nisi regulæ propositæ subsumptionem esse.

His meditationibus defixus, quemadmodum in Quadratis differentiæ sunt numeri impares, ita quoq; quæsivi quales essent differentiæ Cuborum; quæ cum irregulares viderentur, quæsivi differentias differentiarum, donec inveni differentias tertias esse numeros senarios. Hæc observatio mihi aliam peperit: videbam enim ex differentiis præcedentibus generari terminos differentiasq; sequentes, ac proinde ex primis, quas ideo voco generatrices, ut hoc loco 0 . 1 . 6 . 6, sequentes omnes. Hoc concluso restabat invenire, quo additionis, multiplicationisve, aut horum complicationis genere, termini sequentes ex differentiis generatricibus producerentur. Atq; ita resolvendo experiundoq; deprehendi primum Terminum 0 componi ex prima differentia generatrice 0 sumta semel seu vice una: Secundum 1 ex prima 0 semel & secunda 1 semel: Tertium 8 ex prima 0 semel, secunda 1 bis & tertia 6 semel; nam $0 \times 1 + 1 \times 2 + 6 \times 1 = 8$ Quartum 27, ex prima 0 semel, secunda 1 ter, tertia 6 ter, quarta 6 semel: nam $0 \times 1 + 1 \times 3 + 6 \times 3 + 6 \times 1 = 27$, *&c.* idq; Analysis mihi universale esse comprobavit. Hæc fuit occasio observationionis meæ longe alia a *Moutoniana*, qui cum in Tabulis condendis laboraret, in hoc calculandi compendium cum *Regnaldo* incidit: nec vel illi vel *Regnaldo* adimenda laus; quod & *Briggius* in Logarithmicis suis jam olim talia quædam, observante *Pellio*, ex parte advertit. Mihi hoc superest ut addam nonnulla illis indicta, ad amoliendum Transcriptoris nomen; neq; enim interest Reipublicæ quis observaverit, interest quid observetur. Primum ergo illud adjicio, quod apud *Moutonium* non extat, & caput tamen

nitu

rei eſt: quinam ſint illi numeri, quorum Tabulam ille exhibet in infinitum continuandam, quorum ductu in differentias generatrices, productis inter ſe junctis, termini Serierum generentur. Vides enim ex ipſo modo quo tabula ab eo *pag.* 385. exhibetur, non fuiſſe id ei ſatis exploratum; alioqui enim veriſimile eſt ita Tabulam fuiſſe diſpoſiturum, ut ea numerorum connexio atq; harmonia appareret; niſi quis de induſtria texiſſe dicat: ita enim ſe habet pars Tabulæ.

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
(4)	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Apparet ex hujus Tabulæ constructione ſolam haberi rationem correſponſus numerorum generantium cum numero Termini generati; ut cum terminus eſt quartus (4) producitur ex prima differentia ſemel, ſecunda ter 3, tertia ter 3, quarta ſemel 1; ideo in eadem (4) Linea tranſverſa locantur 1. 3. 3. 1. Sed vel non obſervavit vel diſſimulavit autor correſponſum numerorum, ſi a ſummo deorſum eundo per columnas diſponantur hoc modo,

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Ita enim ſtatim vera genuinaq; eorum natura ac generatio apparet; eſſe ſcilicet eos numeros quos Combinatorios appellare ſoleo, de quibus multa

multa dixi in dissertatiuncula de Arte Combinatoria; quosq; alii appellant Ordines numericos; alii in specie primam columnam Unitatum; secundam Numerorum naturalium, tertiam Triangularium, quartam Pyramidalium, quintam Triangulo-Triangularium *&c.* de quibus integer extat Tractatus *Paschalii* sub titulo Trianguli Arithmetici; in quo tamen proprietatem numerorum ejusmodi tam illustrem tamq; naturalem * non observatam sum miratus. Sed est profecto casus quidam in inveniendo, qui non semper maximis ingeniis maxima, sed sæpe etiam mediocribus nonnulla offert.

Hinc jam vera numerorum istorum natura, & Tabulæ constructio, sive a *Regnaldo* sive a *Moutonio* dissimulata, intelligitur: semper enim terminus datus columnæ datæ componitur ex termino præcedente columnæ tam præcedentis quam datæ: Atq; illud quoq; apparet, non opus esse molesto calculo ad Tabulam a *Moutonio* propositam continuandam, ut ipse postulat; cum hæ numerorum Series passim jam tradantur calculanturque.

Cæterum *Moutonius* observatione ista ad interponendas medias proportionales inter duos extremos numeros datos; ego ad inveniendos ipsos numeros extremos in infinitum cum eorum differentiis, utendum censebam. Hinc ille non nisi cum differentiæ ultimæ evanescunt (aut pene evanescunt) usum regulæ invenit; ego detexi innumerabiles casus, regula quadam inobservata comprehendendos; ubi possum ex datis numeris finitis certo modo multiplicatis producere numeros plurimarum Serierum in infinitum euntium, etsi differentiæ earum non evanescant.

Ex iisdem fundamentis possum efficere in progressionibus problemata plurima; aut in Numeris singularibus, aut in Rationibus vel Fractionibus: possum enim progressiones addere subtrahereq; imo multiplicare quoq; & dividere, idq; compendiose.

$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{21}$
$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{56}$
$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{70}$.	$\frac{1}{126}$
&c.	*&c.*	*&c.*	*&c.*

Multa alia circa hos numeros observata sunt a me, ex quibus illud eminet, quod modum habeo summam inveniendi Seriei Fractionum in infinitum decrescentium; quarum numerator Unitas, nominatores vero numeri isti Triangulares aut Pyramidales, aut Triangulo Triangulares *&c.*

* Vi-

* *Vide* Paschalii *Triangulum Arithmeticum*, Parisiis *Anno* 1665 *editum, pag.* 2. *ubi definitionum antepenultima hæc est.*

Le nombre de chaque cellule est egal a celuy de la cellule qui la precede dans son rang perpendiculaire, plus a celuy de la cellule qui la precede dans son rang parallele. Ainsi la cellule F, c'est a dire le nombre de la cellule F, egale la cellule C *plus la cellule* E; *& ainsi des autres.*

In scriniis etiam Reg. Societatis asservantur Autographa quinque Epistolarum, a D. Leibnitio *ad D.* Oldenburgum *eodem Anno* 1673 *scriptarum; prima autem* Londini *data est* Februarii 20, *reliquæ vero* Parisiis Martii 30, Aprilis 26, Maii 24, *et* Junii 8. *Omniumque, si secundam excipias, exemplaria leguntur in Libro Regiæ Societatis No. 6. Pag.* 34, 101, 120 *et* 137.

Quinetiam duæ aliæ D. Leibnitii *ad* Oldenburgum *Epistolæ, altera Anno* 1674 Julii 15, *altera* Octob. 26 *sequente*, Parisiis *datæ, leguntur in Lib. Epist. Regiæ Societatis No. 7. pag.* 93 *et* 110, *eædemque reperiuntur impressæ in Tomo tertio Operum Mathematicorum D.* J. Wallis.

Ex harum priore 15 Julii *data.*

ALIA mihi Theoremata sunt, momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis mirabile est, cujus ope Area Circuli, vel Sectoris ejus dati, exacte exprimi potest per Seriem quandam Numerorum rationalium continue productam in infinitum. Sed & Methodos quasdam Analyticas habeo generales admodum & late fusas, quas majoris facio quam Theoremata particularia & exquisita.

Ex posteriore 26 Octob. *data.*

PORRO, in ea Geometriæ parte rem memorabilem mihi evenisse nuncio. Scis D. Vicecomitem *Brounkerum*, & Cl. *Nic. Mercatorem* exhibuisse Infinitam Seriem numerorum rationalium, spatio Hyperbolæ

L æqualem.

æqualem. Sed hoc in Circulo efficere hactenus potuit * nemo. Etsi enim illi *Brounkerus* & *Wallisius* dederint numeros rationales magis magisque appropinquantes; nemo tamen dedit [*imo uterque dedit; sed forte non ejus sensu,*] Progressionem Numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatæ summa sit exacte æqualis Circulo. Sed vero mihi tandem feliciter successit. Inveni enim seriem Numerorum valde simplicem, cujus summa exacte æquatur Circumferentiæ Circuli; posito Diametrum esse Unitatem. Et habet ea Series id quoque peculiare, quod miras quasdam Circuli & Hyperbolæ exhibet harmonias. Itaque Tetragonismi Circularis Problema, jam a Geometria traductum est ad Arithmeticam Infinitorum. Quod hactenus frustra quærebatur. Restat ergo tantum, ut Doctrina de Serierum seu Progressionum numericarum summis perficiatur. Quicunque hactenus Quadraturam Circuli exactam quæsivere; ne viam quidem aperuere per quam eo pervenire posse spes sit. *Quod nunc primum a me factum dicere ausim.* Ratio Diametri ad Circumferentiam exacte a me exhiberi potest per Rationem, non quidem Numeri ad Numerum, (id enim foret absolute invenisse;) sed per rationem Numeri ad totam quandam Seriem numerorum rationalium valde simplicem & regularem. Eadem ** Methodo etiam Arcus cujuslibet, cujus Sinus datur, Geometrice exhiberi per ejusmodi seriem, valor potest; nullo ad integræ Circumferentiæ dimensionem recursu. Ut adeo necesse non sit, Arcus rationem ad Circumferentiam nosse.

* *Collinius* jam ante quadrennium Series *Newtonianas*, ante triennium *Gregorianas*, cum Amicis communicare cœpit. *Leibnitius* in *Anglia* diversabatur Anno superiore (1673) & hujusmodi Series nondum communicaverat, nec prius cum Amicis communicare cœpit quam ab *Oldenburgo* acceperat, ut mox patebit; neque alias communicavit quam quas acceperat.

** Methodum exhibendi Arcum cujus Sinus datur *Leibnitius* ab *Oldenburgo* postea quæsivit *Maii* 12 1676.

Excerpta ex Epistola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1674, 8 Decembris *data, cujus asservatur Autographum. Eadem autem legitur inter Epistolas Regiæ Societatis, Lib. N°. 7. pag.* 119; *estque responsum ad literas D.* Leibnitii 26 Octobris *præcedentis datas.*

QUOD de profectu in Curvilinearum dimensione memoras bene se habet: sed ignorare te nolim Curvarum dimetiendarum rationem & Methodum a laudato *Gregorio*, nec non ab *Isaaco Newtono* ad Curvas quaslibet

quaslibet tum Mechanicas, tum Geometricas, quin & Circulum ipsum se extendere, ita scilicet ut si in aliqua Curva Ordinatam dederis, istius Methodi beneficio possis Lineæ Curvæ longitudinem, Aream figuræ, ejusdem centrum Gravitatis, Solidum rotundum ejusq; superficiem sive erectam sive inclinatam, solidiq; rotundi segmenta secunda; horumq; omnium conversa invenire: quin & dato quolibet arcu in Quadrante, Logarithmicum Sinum, Tangentem vel Secantem, non cognito naturali, & conversum computare. Quod vero ais neminem hactenus dedisse progressionem numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatæ summa sit æqualis circulo, id vero tibi tandem feliciter successisse, de eo quidem tibi gratulor, &c.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis *Anno* 1675, 30 Martii *data. Extat Autographum scriptoris; et reperitur descripta inter Epistolas Reg. Soc. N°. 7. pag.* 213. *Hac autem respondetur ad supradictas* Oldenburgi *literas* 8 Decembris *præcedentis datas.*

SCribis clarissimum *Newtonum* vestrum habere methodum exhibendi Quadraturas omnes, omniumq; curvarum superficierum & solidorum ex revolutione genitorum dimensiones, & centrorum gravitatis inventiones, per appropinquationes scilicet, ita enim interpretor. Quæ methodus si est universalis & commoda, meretur æstimari; nec dubito fore ingeniosissimo Authore dignam. Addis tale quid *Gregorio* innotuisse.

Ex Epistola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1675, 15 Aprilis *data, cujus habetur exemplar inter Epistolas Reg. Societatis N°. 7. pag.* 216. *Hac respondetur ad D.* Leibnitii *literas* 30 Martii *præcedentis datas: Anglice autem extat manu D.* Collins *designata ac* 10 Aprilis *data, eamque Latine transtulit D.* Oldenburg *& ad D.* Leibnitium *misit.*

D. *Collinius*, præmissa salute, quæ sequuntur remittit. Primo Cl. *Gregorium* in postrema sua ad Illustrem *Hugenium* responsione Seriem suppeditasse ad semicircumferentiam circuli inveniendam quæ talis.

Pone

Pone radium $= r$, dimidium latus quadrati inſcripti circulo $= d$, & differentiam inter radium & latus quadrati $= e$: ſemicircumferentia æqualis eſt $\frac{4rr}{2d - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{90d} - \frac{e^3}{756d^2} - \frac{23e^4}{113400d^3} - \frac{2623e^5}{7484400d^4} - \&c.}$ in infinitum; quæ Series adeo produci poteſt ut a ſemicircumferentia minus differat quam ulla quantitas aſſignabilis.

Editum hoc fuit a D. *Gregorio* poſtquam D. *Mercatoris* Logarithmotechnia jam extabat, quæ quam primum viderat lucem, ad D. *Barrovium* a me fuit tranſmiſſa; qui obſervato in ea infinitæ ſeriei uſu ad Logarithmos conſtruendos, reſcribebat Methodum illam jam aliquandiu excogitatam fuiſſe a ſucceſſore ſuo *Newtono*, omnibuſq; Curvis, earumque portionibus, Geometricis æque ac Mechanicis univerſim applicatam, cujus rei ſpecimina quædam ſubjecit, viz.

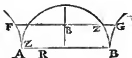
Poſita pro Radio Unitate, datoq; x pro Sinu, ad inveniendum z Arcum Series hæc eſt;

$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ &c. in infinitum. Et extracta radice hujus Æquationis methodo ſymbolica, ſi dederis z pro arcu, ad inveniendum x ſinum ſeries hæc eſt;

$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 +$ &c. Atque hæc Series facile continuatur in infinitum. Prioris beneficio ex Sinu 30 grad. *Ceulenii* numeri facile ſtruuntur.

Conſimiliter ſi ponas radium R, & B Sinum arcus: Zona inter diametrum & Chordam illi parallelam eſt

$= 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} -$ &c. Atque eadem ſeries mutatis ſignis termini ſecundi, quarti & ſexti, &c. inſervit aſſignandæ Areæ Zonæ æquilateris Hyperbolæ, viz.



$AFGB = 2RB + \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} + \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} + \frac{7B^{11}}{1408R^9} -$ &c.

Rurſum, dato Radio R, & Sinu verſo ſive ſagitta a, ad inveniendam Aream ſegmenti reſecti a Chorda: pone b^2 pro $2Ra$,

& erit ſegmentum $= \frac{4ba}{3} - \frac{2a^3}{5b} - \frac{a^5}{14b^3} - \frac{a^7}{36b^5} - \frac{5a^9}{352b^7} - \frac{7a^{11}}{832b^9} -$ &c.

Et Arcus integer $= 2b + \frac{a^2}{3b} + \frac{3a^4}{20b^3} + \frac{5a^6}{56b^5} + \frac{35a^8}{576b^7} + \frac{63a^{10}}{1408b^9} +$ &c.

Duæ

Duæ hæ Series D. *Gregorio* debentur, quas exhibuit ex eo tempore quo usus est hac Methodo; quod ab ipso aliquot post annis factum, postquam scilicet intellexerat D. *Newtonum* generatim eam applicasse. Exinde quoque ad nos misit Series similes ad Tangentes naturales ex earundem Arcubus, & conversim, obtinendum. Ex. gr. pone Radium $= r$, Arcum a, Tangentem t; erit $t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} +$ &c. Et conversim ex Tangente invenire Arcum ejus

$$* a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \text{\&c.}$$

Atque hoc factum cùm vides, facile credideris, posse eadem Methodo æque facile ex Arcu inveniri Sinum vel Tangentem Logarithmicum absq; inventione Naturalis, & conversim. Pronum quoque tibi fuerit credere Methodum hanc applicari posse ad rectificationem quarumlibet curvarum, particulatim vero ad lineam Quadratricem, & ad inveniendam Aream illius Figuræ: id quod antehac nulla demum cum Methodo fuit præstitum. Atque ulteriore calculationis labore extendi potest ad inveniendas Areas Superficierum in rotundis Solidis inclinantibus, nec non ad inveniendas Soliditates secundorum segmentorum in Solidis rotundis. *E. G.* Si Conoides aliqua secetur a plano transeunte per Basin ejus, poterit id vocari Segmentum primum; & si hæc portio iterum secetur a plano recto ad planum prius secans, portio eum in modum secta hoc ipso intenditur ut sit Segmentum [secundum.]

Porro Methodus eadem applicatur inveniendis radicibus purarum potestatum, valdeque affectarum æquationum; ita ut ex quolibet numero absque Logarithmorum ope, excitare possis quamlibet potestatem per saltum, & ex quavis potestate, utut affecta, invenire Radicem ejus, vel quodvis medium illud inter & Unitatem assignatum. D. *Gregorius* magno labore paravit Seriem infinitam, generatim respectivis potestatibus affectis cujuslibet æquationis propositæ adaptandam; ita ut quivis Algebræ cultor, penu ipsius instructus, mox aptare possit Seriem aliquam ad inveniendam quamlibet Radicem cujusvis æquationis propositæ, postquam innotuit ad quod latus noti limitis Radix ceciderit. Verum id hactenus nobis non communicavit, uti nec nos illum ad id faciendum solicitavimus, imprimis cum ipse lubens permittat *Newtono*, ut ille primus novæ hujus Methodi de infinita Serie inventionem orbi Mathematico patefaciat, &c.

* Hanc Seriem D. *Collins* initio anni *1671* a *Gregorio* acceperat ut supra; D. *Leibnitius* eandem cum amicis in *Gallia* hoc anno ut suam communicavit, celata hac Epistola.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgh, *Anno* 1675, 20 Maii Parisiis *data. Extat Autographon ejus, eademque legitur in Lib. Epist. Regiæ Societatis N°. 7. pag. 235. Responsum autem est ad prædictas D.* Oldenburgi *literas* 15 Aprilis *datas.*

LIteras tuas multa fruge Algebraica refertas accepi, pro quibus tibi & doctissimo *Collinio* gratias ago. Cum nunc præter ordinarias curas Mechanicis imprimis negotiis distrahar, non potui examinare Series quas misistis, ac cum * meis comparare. Ubi fecero † perscribam tibi Sententiam meam : nam aliquot jam anni sunt quod inveni meas via quadam sic satis singulari. *Collinium* ipsum magni facio, quoniam omnes puræ Matheseos partes ab ipso egregie cultas video. Multa habeo destinata a quibus me deterrent calculi tantum; qui nec suscipi facile ab homine occupato, nec alteri nisi doctissimo ac sincerissimo tuto credi possunt.

* His verbis patet Series, quas D. *Leibnitius* se ante annos aliquot invenisse professus est, a communicatis diversas fuisse. Subjungit etiam ipse verbis disertis *sua a Communicatis longe diversa esse circa hanc rem meditata.* Vide Epist. *Maii* 12, 1676.

† *N. B.* Hoc nunquam fecit D. *Leibnitius*, sed ubi Series duas primas per *Mohrum* quendam denuo accepisset, postulavit Methodum D. *Newtoni* perveniendi ad istas duas Series ad se mitti, quasi nullas prius ab *Oldenburgo* accepisset. Et hoc pacto Epistolam *Oldenburgi* oblivioni tradendo, licentiam obtinuit Serierum ob eo acceptarum ultimam sibi vindicandi.

Ex Actis Eruditorum Anno 1691 *Mense* Aprili *pag.* 178. *habentur hæc D.* Leibnitii *verba.*

JAM Anno 1675 *compositum habebam * opusculum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ab illo tempore lectum, sed quod, materia sub manibus crescente, limare ad editionem non vacavit, postquam aliæ occupationes supervenere ; præsertim cum nunc prolixius exponere vulgari more, quæ Analysis nostra novæ paucis exhibet, non satis operæ pretium videatur. Interim insignes quidam Mathematici, quibus veritas primariæ nostræ Propositionis dudum in Actis publicatæ innotuit, pro humanitate sua nostri qualiscunque inventi candide meminere.*

* Quadratura Arithmetica, de qua hic agitur, ea est quam *Gregorius* cum D. *Collinio* initio Anni 1671, *Oldenburgus* cum D. *Leibnitio* hoc Anno communicavit. De hac Quadratura

Quadratura D. *Leibnitiu* opusculum vulgari more composuit & cum amicis hoc anno communicare cœpit: Anno proximo scriptum polivit ut cum *Oldenburgo* communicaretur: Anno tertio in patriam redux Negotiis publicis interesse cœpit, & materia sub manibus crescente opus ad Editionem limare non amplius vacavit. Sed neque opere pretium duxit subinde prolixius exponere vulgari more quæ Analysis sua nova paucis exhibet. Inventa est igitur hæc Analysis postquam D. *Leibnitius* opusculum vulgari more compositum polire & limare desiit, & Negotiis publicis interesse cœpit.

Excerpta ex Schediasmatis manu D. Collins *exaratis & in scriniis ejus repertis, & nonnullis in locis* Oldenburgi *calamo castigatis; quæ quidem D.* Oldenburg *D.* Tschürnhausio *transmittenda acceperat & Latine verterat. Extant autem tum Autographa D.* Collins, *tum responsum ad eadem D.* Oldenburgo *redditum, cum Titulo manu ejus inscripto,* " Responsum ad Scriptum D. *Collinii* de *Cartesii* Inventis.

NOnnulli *Cartesium* arrogantiæ insimularunt, asserentem se ex omnibus modis Methodisve possibilibus, in optimam simplicissimamque incidisse: an ullibi hoc affirmaverit *Cartesius* plane nescio, certum tamen est Methodum ducendi Tangentes multum promotam fuisse a *Newtonio* & *Gregorio*. Ita liquet ex *Newtoni* Epistola Anno 1672, 10 *Decemb.* data. *Vide pag.* 29.

Ex Epistola, D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1675, 24 Junii *data, & in Lib. Epist. Regiæ Societatis N°.* 7. *pag.* 243 *descripta Responsum autem est ad præcedentes D.* Leibnitii *Literas* 20 Maii *datas.*

DOminus *Newtonus*, beneficio Logarithmorum graduatorum in scalis παραλλήλως locandis ad distantias æquales, vel circulorum concentricorum eo modo graduatorum adminiculo, invenit radices Æquationum. Tres regulæ rem conficiunt pro Cubicis, quatuor pro Biquadraticis. In harum dispositione respectivæ Coefficientes omnes jacent in eadem Linea recta; a cujus puncto tam remoto a prima Regula ac scalæ graduatæ sunt ab invicem, Linea recta iis superextenditur, una cum præscriptis conformibus genio æquationis, qua in regularum una datur potestas pura radicis quæsitæ.

Ex

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis *Anno* 1675, 12 Julii *data. Hujus extat Autographum ; habeturque Exemplar ejus in Lib. Epist. Reg Societatis* N° 7. *pag.* 149. *Responsum autem est ad Literas praecedentes D.* Oldenburgi, *& impressa legitur inter opera D.* Wallisii. *In hac perperam scribitur* Parius *pro* Darius.

METhodum Celeberrimi *Newtoni*, radices Æquationum inveniendi per Instrumentum, credo differre a mea. Neque enim video, in mea, quid aut Logarithmi aut Circuli concentrici conferant. Quoniam tamen rem Vobis non ingratam video, conabor absolvere, ac tibi communicare, quamprimum otii sat erit.

Scripsisti aliquoties, Vestrates omnium Curvarum dimensiones per appropinquationem dare. Velim nosse, an possint dare Geometrice Dimensionem Curvæ Ellipseos vel Hyperbolæ ex data Circuli aut Hyperbolæ quadratura.

Ex Epistola D. Oldenburgi *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1675, 30 Septemb. *data. Cujus extat Exemplar manu D.* Oldenburg *descriptum. Legitur etiam in Lib. Regiæ Societatis* N°. 7. *pag.* 159. *& Responsum est ad praecedentem.*

SCriptum quoddam Belgicum Belga quidem *Georgius Mohr* vocatus, Algebræ & Mechanicæ probe peritus, apud *Collinium* nostrum reliquit, qui apographum ejus, quale hic insertum vides, impertire tibi voluit ——— *Tschürnhausius* nuper *Parisios* hinc profectus est, & te sine dubio jam salutavit. ——— Scire cupis an dare nostrates Geometrice possint dimensionem Curvæ Ellipseos aut Hyperbolæ, ex data Circuli aut Hyperbolæ quadratura. Ait *Collinius* illos id præstare non posse Geometrica præcisione, sed dare eos posse ejusmodi approximationes quæ quacunque quantitate data minus a scopo aberrabunt. Et speciatim quod attinet alicujus arcus circuli rectificationem, impertiri tibi poterit laudatus *Tschürnhausius* Methodum a *Gregorio* nostro inventam, quam cum apud nos esset, *Collinius* ipsi communicavit.

Ex

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis 28 Decembris *Anno* 1675 *data. Extat Autographum ejus, describiturq; in Lib. Reg. Societatis N°. 7. pag.* 189. *& a D.* Wallisio *impressa est.*

QUOD *Tschürnhausium* ad nos misisti, fecisti pro amico: multum enim ejus consuetudine delector, & ingenium agnosco in Juvene præclarum & magna promittens. Inventa mihi ostendit non pauca, Analytica & Geometrica, sane perelegantia. Unde facile judico, quid ab eo expectari possit.

Habebis & a me Instrumentum Æquationes omnes Geometricas construendi unicum; Et meam Quadraturam Circuli ejusque partium, per Seriem Numerorum Rationalium infinitam; de qua aliquoties scripsi, & quam jam plusquam Biennio abhinc Geometris hic communicavi.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis 12 Maii *Anno* 1676 *data, cujus Autographum in scriniis Regiæ Societatis asservatur, cum Notis manu* Oldenburgi *in tergo scriptis.*

CUM *Georgius Mohr* Danus [*superius Belga*] in Geometria & Analysi versatissimus, nobis attulerit communicatam sibi a Doctissimo *Collinio* vestro expressionem relationis inter Arcum & Sinum per infinitas Series sequentes: Posito Sinu x, Arcu z, Radio 1.

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 \text{ \&c.}$$

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 \text{ \&c.}$$

Hæc * INQUAM, cum nobis attulerit ille, quæ mihi valde ingeniosa videntur, & posterior imprimis Series elegantiam quandam singularem habeat, ideo rem gratam mihi feceris, Vir Clarissime, si demonstrationem transmiseris. Habebis vicissim mea ab his longe diversa circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc Annis ad te perscripsisse credo, demonstratione tamen non addita quam † nunc polio. Oro ut Cl. *Collinio* multam a me salutem dicas: is facile tibi materiam suppeditabit satisfaciendi desiderio meo.

* Quasi ante Annum easdem non accepisset ab *Oldenburgo*.
† Opusculum prædictum de Quadratura Arithmetica D. *Leibnitius* polire perrexit.

Ex Epistola D. Collins *ad D.* Oldenburgum, *D.* Leibnitio *tum* Parisiis *agenti transmittenda. Hujus exemplar, Anno* 1676 14 Junii, *manu ipsius D.* Collins *descriptum, ac in scriniis ejus repertum etiamnum conservatum est.*

RESpondeas, si placet, ad ea quæ quærit D. *Leibnitius* in Literis ejus 12 *Maii* datis, Seriei primæ numeros Coefficientes $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{5}{112}$, $\frac{35}{1152}$, hoc modo compositos esse, $\frac{1\times1}{2\times3}=\frac{1}{6}$, & $\frac{1}{6}\times\frac{3\times3}{4\times5}=\frac{3}{40}$, & $\frac{3}{40}\times\frac{5\times5}{6\times7}=\frac{5}{112}$, & $\frac{5}{112}\times\frac{7\times7}{8\times9}=\frac{35}{1152}$, & $\frac{35}{1152}\times\frac{9\times9}{10\times11}=\frac{63}{2816}$, atque ita deinceps in infinitum: unde intelligi possit hanc Seriem elegantia minime cedere conversæ ejusdem, quæ tamen illi magis arridet. Meditata ejus de eodem Argumento, cum fundamentis plane diversis innitantur, non possunt nobis non esse acceptissima; atque exoptamus ea fidem nostram exuperare posse. Hujus autem Methodi ea est præstantia, ut cum tam late pateat, ad nullam hæreat difficultatem *Gregorium* autem aliosque in ea fuisse opinione arbitror, ut quicquid uspiam antea de hac re innotuit, quasi dubia diluculi lux fuit, si cum meridiana claritate conferatur.

HOC *Anno cum D.* Gregorius *emortuus esset, quæ cum Amicis communicaverat in unum corpus solicitante D.* Leibnitio *collecta sunt. Et extat collectio manu D.* J. Collins *exarata, cum hoc Titulo;*

* *Excerpta ex D.* Gregorii *Epistolis cum D.* Leibnitio *communicanda, tibique postquam perlegerit ille reddenda. Et sic orditur.*

† *D.* H. Oldenburg *Armigero.*

QUandoquidem impense rogasti me, permotus solicitationibus D. *Leibnitii* & aliorum ex *Academia Regia Parisina*, ut Historiolam aliquam concinnarem, Studia & Inventa doctissimi D. *Jacobi Gregorii* nuper defuncti exhibentem; quoniamque arcta inter nos amicitia, crebraque dum viveret

viveret literarum reciprocatio fuit: In honorem Nominis ejus, quæcunq; majoris momenti in literis ejus occurrunt, summa fide in unum colligere statuo, &c.

* *Extracts from Mr.* Gregory's *Letters, to be lent Monsieur* Leibnitz *to peruse; who is desired to return the same to you.*

† *To* H. Oldenburg, *Esquire.*

SIR,

FOrasmuch as you have much pressed me your self, being incited thereto by the earnest Desires of Mr. *Leibnitz* and others of the Royal Academy at *Paris*, to give an Account of the great Pains and Attainments of the late learned Mr. *James Gregory*, deceas'd; there being a great Friendship, and frequent Correspondence between us in his Life time; I shall for the Honour I bear to his Memory, impartially give you an Account of the most material Passages in his Letters.

In hac Collectione habetur Epistola superius impressa, qua Gregorius *Quadraturam prædictam Arithmeticam initio Anni* 1671 *cum D.* Collins *communicavit: Habetur & Epistola D.* Newtoni *ad D.* Collins, 10 Decemb. 1672 *data, & superius impressa, in qua* Newtonus *se Methodum generalem habere dicit ducendi Tangentes, quadrandi Curvilineas, & similia peragendi; & Methodum Exemplo ducendi Tangentes exponit: quam Methodum D.* Leibnitius differentialem *postea vocavit.*

Ex Epistola D. Collins *ad D.* Davidem Gregorium *prædicti* Jacobi Gregorii *nuper defuncti fratrem. Data autem est Anno 1676,* 11 Augusti, *ejusq; habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.*

HIstoriolam composui, qua in unum congessi quæcunq; unquam a Fratre tuo de rebus Mathematicis, vel literis aliasve scripto, vel colloquio acceperim: eo fine ut eandem scriniis Regiæ Societatis (cujus erat sodalis) commissam & asservatam, Amici ejus inspicere possint, vel si libuerit soluto pretio transcriptam habere. Constat autem duodecim circiter schedis. Me vero nihil omisisse quod alicujus momenti esse poterit, si nonnulla cum *Hugenio* aliisve controversa excipias, aras sacras juraturus contingere ausim. Mathematicis *Gallis* quousque profecerat, quæque reliquerat Frater tuus, scire aventibus, me operam dedisse ut iis satisfacerem ex sequentibus comperies. *Sub finem autem exemplaris hujus Epistola hac subjunxerat D.* Collins.

Eruditi

Eruditi ex Academia Regia *Parisiensi*, audita D. *Gregorii* morte, cupide sciscitabantur ea quæ moriens reliquerat; simulq; narrationem eorum quæ attinent doctrinam Serierum infinitarum apud nos repertam petebant: Sequentem ideo ad eos transmittendam curavi, ac deinde ad *Davidem Gregorium* Fratrem *Jacobi* superstitem.

Quod attinet Doctrinam Serierum infinitarum; *Mercator* in Logarithmotechnia sua primum Specimen ejus orbi exhibuit, applicando eam ad Hyperbolæ Quadraturam tantum, & ad Logarithmorum Constructionem, absque radicum extractione. Hanc ipsam ejus doctrinam a D. *Wallisio* in Transact. Philosoph. illustratam habemus; eamque postea adauxit & promovit D. *Gregorius* in Exercitationibus ejus Geometricis eodem anno editis.

Paucos post menses quam editi sunt hi Libri, missi sunt ad D. *Barrovium Cantabrigiæ:* ille autem responsum dedit, hanc infinitarum Serierum doctrinam jam ante biennium a D. *Isaaco Newtono* inventam fuisse, & quibusvis Figuris generaliter applicatam; simulque transmisit D. *Newtoni* opus manuscriptum, a D. *Collins* deinde cum D. Vicecomite *Brounker* Regiæ Societatis tum Præsidi communicatum. *Barrovio* autem cathedram Mathematicam abdicante, *Newtonus* ab eodem commendatus in successorem ejus electus est, & de hac Doctrina publice prælegit; Lectionesque ejus in Bibliotheca publica *Cantabrigiensi* asservantur.

Collins deinde, mediante D. *Barrovio*, D. *Newtono* familiaris factus literarum commercium cum eo habuit; & ab eo Epistolam obtinuit 10 *Decembris* Anno 1672 datam, qua docet modum ducendi Tangentes ad Curvas Geometricas, ope Æquationis qua relatio inter Ordinatim applicatas & Abscissas exprimitur. *Vide Epistolam hanc pag.* 29, 30.

Collins etiam in diversis literis Anno 1669 ad D. *Gregorium* datis, eidem significavit *Newtoni* in hac materia successus. *Gregorius* autem contra, se quoque plures habere pro circulo Series; simulque petiit nonnullas e *Newtonianis*, quas cum propriis conferre voluit, ad se mitti. Misit igitur aliquas D. *Collins*, quas *Gregorius* a suis prorsus diversas, & faciliores calculoque aptiores inveniens, haud levi studio in eandem ipsam *Newtoni* Methodum incidit, circa Annum exeuntem 1670: sicut ipse aperte in Epistola 19 *Decemb.* testatur. *Pag.* 23.

Cum D. Leibnitius *Methodum perveniendi ad Series Anno superiori sibi missas desideraret, & ut.* Gregoriana *omnia* Lutetiam Parisiorum *mitterentur:* Oldenburgus *&* Collins Newtonum *enixe rogarunt ut ipse Methodum suam describeret cum D.* Leibnitio *communicandam.*

Epistola

Epistola prior D. Isaaci Newton, *Matheseos Professoris in Celeberrima Academia* Cantabrigiensi ; *ad D.* Henricum Oldenburg, *Regalis Societatis* Londini *Secretarium* ; 13 Junii 1676, *cum Illustrissimo Viro D.* Godfredo Guilielmo Leibnitio (*eo mediante*) *communicanda. Literis* Oldenburgi, (26 Junii) *ad* Leibnitium *missa.*

Quanquam D. *Leibnitii* modestia, in Excerptis quæ ex Epistola ejus ad me nuper misisti, Nostratibus multum tribuat circa Speculationem quandam *Infinitarum Serierum*, de qua jam cœpit esse rumor : Nullus dubito tamen quin ille, non tantum, *quod asserit*, Methodum reducendi Quantitates quascunque in ejusmodi Series, sed & varia Compendia, forte nostris similia si non & meliora, adinvenerit.

Quoniam tamen ea scire pervelit quæ ab Anglis hac in re inventa sunt ; & ipse ante annos aliquot in hanc Speculationem inciderim : Ut votis ejus aliqua saltem ex parte satisfacerem, nonnulla eorum quæ mihi occurrerunt ad te transmisi.

Fractiones in Infinitas Series reducuntur per Divisionem ; & Quantitates Radicales per Extractionem Radicum ; perinde instituendo Operationes istas in Speciebus, ac institui solent in Decimalibus Numeris. Hæc sunt Fundamenta harum Reductionum.

Sed Extractiones Radicum multum abbreviantur per hoc * *Theorema.*

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi P + PQ significat Quantitatem cujus Radix, vel etiam Dimensio quævis, vel Radix Dimensionis, investiganda est. P, Primum Terminum quantitatis ejus ; Q, reliquos terminos divisos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem Indicem dimensionis ipsius P + PQ : sive dimensio illa Integra sit, sive (ut ita loquar) Fracta ; sive Affirmativa, sive Negativa. Nam, sicut Analystæ, pro aa, aaa, &c. scribere solent a^2, a^3, &c. sic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, &c. scribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, scribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. Et sic pro $\frac{aa}{\sqrt{c.a^3+bbx}}$ scribo $aa \times \overline{a^3+bbx}|^{-\frac{1}{3}}$; &

* Resolutionem Binomii in hujusmodi Seriem Anno 1669 *Newtono* innotuisse patet, ex Analysi supra impressa, pag. 19, lin. 19, 20.

O pro

pro $\frac{aab}{\sqrt{C: \overline{a^3+bbx} \times \overline{a^3+bbx}:}}$ ſcribo $aab \times \overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$. In quo ultimo caſu, ſi $\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur eſſe $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ in Regula: erit $P=a^3$, $Q=\frac{bbx}{a^3}$, $m=-2$, $n=3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in Quoto, uſurpo A, B, C, D, &c. Nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$; B pro ſecundo $\frac{m}{n}AQ$; & ſic deinceps. Cæterum uſus Regulæ patebit Exemplis.

Exemplum 1. Eſt $\sqrt{cc+xx}$ (ſeu $\overline{cc+xx}|^{\frac{1}{2}}$) $= c+\frac{xx}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}-\frac{5x^8}{128c^7}+\frac{7x^{10}}{256c^9}-$ &c. Nam, in hoc caſu, eſt $P=cc$; $Q=\frac{xx}{cc}$, $m=1$, $n=2$, $A\left(=P^{\frac{m}{n}}=cc^{\frac{1}{2}}\right)=c$. $B\left(=\frac{m}{n}AQ\right)=\frac{xx}{2c}$. $C\left(=\frac{m-n}{2n}BQ\right)=-\frac{x^4}{8c^3}$. Et ſic deinceps.

Exemplum 2. Eſt $\sqrt{5: \overline{c^5+c^4x-x^5}:}$ (id eſt, $\overline{c^5+c^4x-x^5}|^{\frac{1}{5}}$) $= c+\frac{c^4x-x^5}{5c^4}-\frac{2c^8xx+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9}+$ &c. Ut patebit ſubſtituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q. Poteſt etiam $-x^5$ ſubſtitui pro P, & $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q. Et tunc evadet $\sqrt{5: \overline{c^5+c^4x-x^5}:} = -x+\frac{c^4x+c^5}{5x^4}+\frac{2c^8xx+4c^9x+c^{10}}{25x^9}+$ &c. Prior modus eligendus eſt ſi x valde parvum ſit; poſterior, ſi valde magnum.

Exempl. 3. Eſt $\frac{N}{\sqrt{C: \overline{y^3-a^2y}}}$ (hoc eſt, $N\times\overline{y^3-a^2y}|^{-\frac{1}{3}}$) æqualis $N\times\frac{1}{y}+\frac{aa}{3y^3}+\frac{2a^4}{9y^5}+\frac{14a^6}{81y^7}$ &c. Nam $P=y^3$. $Q=-\frac{aa}{yy}$. $m=-1$, $n=3$. $A\left(P^{\frac{m}{n}}=y^{3\times-\frac{1}{3}}\right)=y^{-1}$, hoc eſt $\frac{1}{y}$. $B\left(=\frac{m}{n}AQ=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{y}\times-\frac{aa}{yy}\right)=\frac{aa}{3y^3}$ &c.

Exemplum 4. Radix Cubica ex Quadrato-quadrato ipſius $d+e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}$) eſt $d^{\frac{4}{3}}+\frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}}-\frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}}+$ &c. Nam $P=d$. $Q=\frac{e}{d}$. $m=4$. $n=3$. $A\left(=P^{\frac{m}{n}}\right)=d^{\frac{4}{3}}$, &c.

Exem-

Exempl. 5. Eodem modo ſimplices etiam poteſtates eliciuntur. Ut, ſi quadrato-cubus ipſius $d+e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{5}$ ſeu $\overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}$) deſideretur: Erit juxta Regulam, $P=d$. $Q=\frac{e}{d}$. $m=5$. & $n=1$. Adeoque A $(=P^{\frac{m}{n}})=d^{5}$. B $(=\frac{m}{n}AQ)=5d^{4}e$. & ſic $C=10d^{3}ee$. $D=10dde^{3}$. $E=5de^{4}$. $F=e^{5}$. & G $(=\frac{m-5n}{6n}FQ)=0$. Hoc eſt, $\overline{d+e}|^{5}=d^{5}+5d^{4}e+10d^{3}ee+10dde^{3}+5de^{4}+e^{5}$.

Exempl. 6. Quinetiam Diviſio, ſive ſimplex ſit, ſive repetita, per eandem Regulam perficitur. Ut ſi $\frac{1}{d+e}$ (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{-1}$ ſive $\overline{d+e}|^{-\frac{1}{1}}$) in feriem ſimplicium terminorum reſolvendum ſit: Erit, juxta Regulam, $P=d$. $Q=\frac{e}{d}$. $m=-1$. $n=1$. & A $(=P^{\frac{m}{n}}=d^{-\frac{1}{1}})=d^{-1}$ ſeu $\frac{1}{d}$. B $(=\frac{m}{n}AQ=-1\times\frac{1}{d}\times\frac{e}{d})=-\frac{e}{dd}$. Et ſic $C=\frac{ee}{d^{3}}$. $D=-\frac{e^{3}}{d^{4}}$ &c. Hoc eſt, $\frac{1}{d+e}=\frac{1}{d}-\frac{e}{dd}+\frac{ee}{d^{3}}-\frac{e^{3}}{d^{4}}$ &c.

Exemp. 7. Sic & $\overline{d+e}|^{-3}$, (hoc eſt, Unitas ter diviſa per $d+e$, vel ſemel per cubum ejus) evadit $\frac{1}{d^{3}}-\frac{3e}{d^{4}}+\frac{6ee}{d^{5}}-\frac{10e^{3}}{d^{6}}+$ &c.

Exempl. 8. Et $N\times\overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$, (hoc eſt, N diviſum per Radicem cubicam ipſius $d+e$) evadit $N\times\frac{1}{d^{\frac{1}{3}}}-\frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}}+\frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}}-\frac{14e^{3}}{81d^{\frac{10}{3}}}+$ &c.

Exempl. 9. Et $N\times\overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$, hoc eſt, N diviſum per radicem quadrato-cubicam ex Cubo ipſius $d+e$, ſive $\frac{N}{\sqrt{5:\overline{d^{3}+3dde+3dee+e^{3}}}}$) evadit $N\times\frac{1}{d^{\frac{3}{5}}}-\frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}}+\frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}}-\frac{52e^{3}}{125d^{\frac{18}{5}}}+$ &c.

Per eandem Regulam, Geneſes Poteſtatum, Diviſiones per Poteſtates aut per Quantitates Radicales, & Extractiones Radicum altiorum in Numeris, etiam commode inſtituuntur.

Extractiones Radicum Æquationum Affectarum in Speciebus imitantur earum Extractionem in Numeris. Sed Methodus *Vietæ & Oughtredi* noſtri huic negotio minus idonea eſt. Quapropter aliam excogitare adactus ſum, *cujus ſpecimina, ne repetantur, vide in Tractatu de Analyſi, &c. pag.* 9, 10, *&c.*

Dicam

Dicam tantum in genere, Quod radix cujusvis Æquationis semel extracta, pro Regula resolvendi consimiles æquationes asservari possit; quodque ex pluribus ejusmodi Regulis, Regulam Generaliorem plerumque efformare liceat; & quod Radices omnes, sive simplices sint sive affectæ, modis infinitis extrahi possint; de quorum simplicioribus itaque semper consulendum est.

Quomodo ex Æquationibus sic ad Infinitas Series reductis, Areæ & Longitudines Curvarum, contenta & Superficies solidorum, vel quorumlibet Segmentorum figurarum quarumvis, eorumque Centra Gravitatis determinantur; & quomodo etiam Curvæ omnes Mechanicæ ad ejusmodi Æquationes Infinitarum Serierum reduci possint, indeque Problemata circa illas resolvi perinde ac si Geometricæ essent; nimis longum foret describere. Sufficiat Specimina quædam talium Problematum recensuisse: Inque iis, brevitatis gratia, literas A, B, C, D, &c. pro terminis Seriei, sicut sub initio, nonnunquam usurpabo.

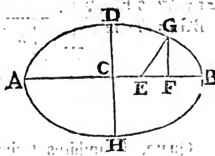
1. Si ex dato Sinu Recto, vel Sinu Verso, Arcus desideretur: Sit radius r, & sinus rectus x: Eritque Arcus $= x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +$ &c. Hoc est, $= x + \frac{1\times1\times xx}{2\times3\times rr}A + \frac{3\times3xx}{4\times5rr}B + \frac{5\times5xx}{6\times7rr}C + \frac{7\times7xx}{8\times9rr}D +$ &c. Vel sit d diameter, ac x sinus versus; & erit Arcus $= d^{\frac12}x^{\frac12} + \frac{x^{\frac32}}{6d^{\frac12}} + \frac{3x^{\frac52}}{40d^{\frac32}} + \frac{5x^{\frac72}}{112d^{\frac52}}$ &c. Hoc est, $=\sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3xx}{40dd} + \frac{5x^3}{112d^3} +$ &c.

2. Si vicissim ex dato Arcu desideretur Sinus: Sit radius r, & arcus z: Eritque sinus rectus $= z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} -$ &c. Hoc est, $= z - \frac{zz}{2\times3rr}A - \frac{zz}{4\times5rr}B - \frac{zz}{6\times7rr}C -$ &c. Et sinus versus $= \frac{zz}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} +$ &c. Hoc est, $\frac{zz}{1\times2r} - \frac{zz}{3\times4rr}A - \frac{zz}{5\times6rr}B - \frac{zz}{7\times8rr}C -$ &c.

3. Si Arcus capiendus sit in ratione data ad alium Arcum: Esto diameter $= d$, chorda arcus dati $= x$, & arcus quæsitus ad arcum illum datum ut n ad 1: Eritque arcus quæsiti Chorda $= nx + \frac{1-nn}{2\times3dd}xxA + \frac{9-nn}{4\times5dd}xxB + \frac{25-nn}{6\times7dd}xxC + \frac{49-nn}{8\times9dd}xxD + \frac{81-nn}{10\times11dd}xxE +$ &c. Ubi nota, quod cum n est numerus impar, Series desinet esse infinita, & evadet eadem quæ prodit per vulgarem Algebram, ad multiplicandum datum angulum per istum numerum n.

4 Si

4. Si in Axe alterutro AB Ellipſeos ADB (cujus centrum C, & axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG, occurrens Ellipſi in G, motu angulari feratur; & ex data Area ſectoris Elliptici BEG, quæratur recta GF, quæ a puncto G ad axem normaliter demittitur: Eſto BC $= q$, DC $= r$, EB $= t$, ac duplum areæ BEG $= z$;



Et erit GF $= \frac{z}{t} - \frac{q}{6rrt^4}z^3 + \frac{10qq - 9qt}{120r^4t^7}z^5$

$- \frac{280q^3 + 504qqt - 225qtt}{5040r^6t^{10}}z^7 + \&c.$ Sic itaque Aſtronomicum illud *Kepleri* Problema reſolvi poteſt.

5. In eadem Ellipſi, ſi ſtatuatur CD $= r_x \frac{CB^2}{CD} = c$ & CF $= x$: Erit Arcus Ellipticus DG $= x + \frac{1}{6cc}x^3 + \frac{1}{10rc^3}x^5 + \frac{1}{14rrc^4}x^7 + \frac{1}{18r^3c^5}x^9 + \frac{1}{22r^4c^6}x^{11} + \&c.$

$$\begin{array}{cccc} -\frac{1}{40c^4} & -\frac{1}{28rc^5} & -\frac{1}{24rrc^6} & -\frac{1}{22r^3c^7} \\ & +\frac{1}{112c^6} & +\frac{1}{48rc^7} & +\frac{3}{88rrc^8} \\ & & -\frac{5}{1152c^8} & -\frac{5}{352rc^9} \\ & & & +\frac{7}{2816c^{10}} \end{array}$$

Hic numerales Coefficientes ſupremorum terminorum ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, &c.) ſunt in Muſica progreſſione: Et numerales Coefficientes omnium inferiorum in unaquaque columna prodeunt multiplicando continuo numeralem Coefficientem ſupremi termini per terminos hujus progreſſionis $\frac{\frac{1}{2}n - 1}{2}$, $\frac{\frac{3}{2}n - 3}{4}$, $\frac{\frac{5}{2}n - 5}{6}$, $\frac{\frac{7}{2}n - 7}{8}$, $\frac{\frac{9}{2}n - 9}{10}$, &c. Ubi n ſignificat numerum dimenſionum ipſius c in denominatore iſtius ſupremi termini. *E. g.* ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$ numerales coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipſius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n - 1}{2}$, hoc eſt in 1; & prodit $\frac{1}{22}$ numeralis coefficiens termini proxime inferioris: dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{3}{2}n - 3}{4}$, ſive in $\frac{n - 3}{4}$, hoc eſt, in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in iſta columna. Atque iſta $\frac{3}{88} \times \frac{\frac{5}{2}n - 5}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ numeralem coefficientem quarti termini; & $\frac{5}{352} \times \frac{\frac{7}{2}n - 7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum uſque columnis præſtari poteſt: Adeoque valor ipſius DG per hanc Regulam pro libitu produci.

 Adhæc,

Adhæc, ſi BF dicatur x, ſitque r latus rectum Ellipſeos, & $e = \frac{r}{AB}$; Erit Arcus Ellipticus

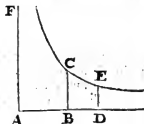
$$BG = \sqrt{rx} \text{ in } \overline{1 + \left.\begin{matrix} +2 \\ -\frac{3}{2}e \\ \hline 3r \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} -2 \\ +3e \\ -\frac{9}{8}ee \\ \hline 5rr \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +4 \\ -9e \\ +\frac{23}{4}e^2 \\ -\frac{17}{16}e^3 \\ \hline 7r^3 \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} -10 \\ +30e \\ -\frac{133}{4}e^2 \\ +\frac{92}{8}e^3 \\ -\frac{45}{128}e^4 \\ \hline 9r^4 \end{matrix}\right\} x^4 + \&c.}$$

Quare, ſi ambitus totius Ellipſeos deſideretur, Biſeca CB in F, & quære Arcum DG per prius Theorema, & Arcum BG per poſterius.

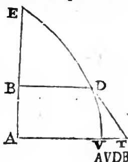
6. Si, vice verſa, ex dato Arcu Elliptico DG quæratur Sinus ejus CF; tum dicto $CD = r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$, & Arcu illo $DG = z$; erit

$$CF = z - \frac{1}{6cc}z^3 \begin{matrix} -\frac{1}{10rc^3} \\ +\frac{13}{120c^4} \end{matrix} z^5 \begin{matrix} -\frac{1}{14rrc^4} \\ +\frac{91}{420rc^5} \\ -\frac{493}{5040c^6} \end{matrix} z^7 - \&c.$$

Quæ autem de Ellipſi dicta ſunt omnia, facile accommodantur ad Hyperbolam; mutatis tantum ſignis ipſorum c & e, ubi ſunt imparium dimenſionum.



7. Præterea, ſi ſit CE Hyperbola, cujus Aſymptoti AD, AF rectum angulum FAD conſtituant; & ad AD erigantur utcunque perpendicula BC, DE occurrentia Hyperbolæ in C & E: & AB dicatur a, BC b, & Area BCED z; Erit $BD = \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} + \&c.$ Ubi Coefficientium Denominatores prodeunt multiplicando terminos hujus Arithmeticæ Progreſſionis 1, 2, 3, 4, 5, &c. in ſe continuo. Et hinc ex Logarithmo dato poteſt Numerus ei competens inveniri.

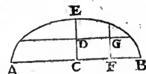


8. Eſto VDE Quadratrix, cujus vertex eſt V; exiſtente A centro, & AE ſemidiametro Circuli ad quem aptatur, & angulo VAE recto: Demiſſoque ad AE perpendiculo quovis DB, & acta Quadratricis Tangente DT occurrente axi ejus AV in T: Dic $AV = a$, & $AB = x$; Eritque $DB = a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} - \&c.$ Et $VT = \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} + \&c.$ Et Area

AVDB $= ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} -$ &c. Et Arcus VD $= x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} +$ &c. Unde viciſſim, ex dato BD, vel VT, aut Area AVDB, arcuve VD, per Reſolutionem affectarum æquationum erui poteſt x ſeu AB.

9. Eſto denique AEB Sphæroides revolutione Ellipſeos AEB circa axem AB genita, & ſecta Planis quatuor, AB per axem tranſeunte, DG parallelo AB, CDE perpendiculariter biſecante axem, & FG parallelo CE: Sitque recta CB $= a$, CE $= c$, CF $= x$, & FG $= y$: Et Sphæroideos ſegmentum CDGF, dictis quatuor Planis comprehenſum, erit

$$
\begin{array}{llllll}
+\,2cxy & -\frac{x}{3c}y^3 & -\frac{x}{20c^3}y^5 & -\frac{x}{56c^5}y^7 & -\frac{5x}{576c^7}y^9 & -\text{\&c.} \\
-\frac{cx^3}{3aa} & -\frac{x^3}{18caa} & -\frac{x^3}{40c^3aa} & -\frac{5x^3}{336c^5aa} & -\text{\&c.} & \\
-\frac{cx^5}{20a^4} & -\frac{x^5}{40ca^4} & -\frac{3x^5}{160c^3a^4} & -\text{\&c.} & & \\
-\frac{cx^7}{56a^6} & -\frac{5x^7}{336ca^6} & -\text{\&c.} & & & \\
-\frac{5cx^9}{576a^8} & -\text{\&c.} & & & & \\
-\text{\&c.} & & & & &
\end{array}
$$



Ubi numerales Coefficientes ſupremorum terminorum $(2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56}, -\frac{5}{576},$ &c.) in infinitum producuntur, multiplicando primum coefficientem 2 continuo per terminos hujus progreſſionis $-\frac{1\times 1}{2\times 3}, \frac{1\times 3}{4\times 5}, \frac{3\times 5}{6\times 7}, \frac{5\times 7}{8\times 9}, \frac{7\times 9}{10\times 11}$, &c. Et numerales coefficientes terminorum in unaquaque columna deſcendentium in infinitum, producuntur multiplicando continuo coefficientem ſupremi termini, in prima columna, per eandem progreſſionem; in ſecunda autem, per terminos hujus $\frac{1\times 1}{2\times 3}, \frac{3\times 3}{4\times 5}, \frac{5\times 5}{6\times 7}, \frac{7\times 7}{8\times 9}$, &c. in tertia, per terminos hujus $\frac{3\times 1}{2\times 3}, \frac{5\times 3}{4\times 5}, \frac{7\times 5}{6\times 7}, \frac{9\times 7}{8\times 9}$, &c. in quarta, per terminos hujus $\frac{5\times 1}{2\times 3}, \frac{7\times 3}{4\times 5}, \frac{9\times 5}{6\times 7}$, &c. in quinta, per terminos hujus $\frac{7\times 1}{2\times 3}, \frac{9\times 3}{4\times 5}, \frac{11\times 5}{6\times 7}$, &c. Et ſic in infinitum.

Et eodem modo ſegmenta aliorum Solidorum deſignari, & valores eorum aliquando commode per Series quaſdem numerales in infinitum produci poſſunt.

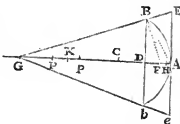
Ex his videre eſt quantum fines Analyſeos per hujuſmodi infinitas æquationes amplientur: Quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pene dixerim problemata (ſi numeralia *Diophanti* & ſimilia excipias) ſeſe extendit.

Non

Non tamen omnino universalis evadit, nisi per ulteriores quasdam methodos eliciendi Series infinitas. Sunt enim quædam Problemata, in quibus non liceat ad Series Infinitas per Divisionem vel Extractionem Radicum simplicium affectarumve pervenire. Sed quomodo in istis casibus procedendum sit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere, quæ circa Reductionem Infinitarum Serierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius scribo, quod hæ speculationes diu mihi fastidio esse cœperunt, adeo ut ab iisdem jam per quinque fere annos abstinuerim.

Unum tamen addam: quod postquam Problema aliquod ad Infinitam Æquationem deducitur, possint inde variæ Approximationes, in usum Mechanicæ, nullo fere negotio formari; quæ, per alias methodos quæsitæ, multo labore temporisque dispendio constare solent.

Cujus rei exemplo esse possunt Tractatus *Hugenii* aliorumque de Quadratura Circuli. Nam, ut ex data Arcus Chorda A, & dimidii Arcus Chorda B, Arcum illum proxime assequaris; Finge arcum illum esse z, & circuli radium r; juxtaque superiora erit A (nempe duplum Sinus dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4\times 6rr} + \frac{z^5}{4\times 4\times 120r^4} -$ &c. Et $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2\times 16\times 6rr} + \frac{z^5}{2\times 16\times 16\times 120r^4} -$ &c. Duc jam B in numerum fictitium n, & a producto aufer A, & residui secundum terminum, (nempe $-\frac{nz^3}{2\times 16\times 6rr} + \frac{z^3}{4\times 6rr}$,) eo ut evanescat, pone $= 0$; indeque emerget $n = 8$; & erit $8B - A = 3z * - \frac{3z^5}{64\times 120r^4} +$ &c. hoc est, $\frac{8B - A}{3} = z$; errore tantum existente $\frac{z^5}{7680r^4} -$ &c. in excessu. Quod est Theorema *Hugenianum*.



Insuper, si in Arcus Bb sagitta AD indefinite producta quæratur punctum G, a quo actæ rectæ GB, Gb abscindant Tangentem Ee quam proxime æqualem Arcui isti: Esto Circuli centrum C, Diameter $AK = d$, & Sagitta $AD = x$: Et erit DB $(= \sqrt{dx - xx})$ $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} -$ &c.

Et $AE = AB = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$ &c. Et AE − DB : AD : : AE : AG. Quare $AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12xx}{175d} -$ vel + &c. Finge ergo $AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$: & vicissim erit DG $(\frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x)$: DB : : DA : AE − DB.

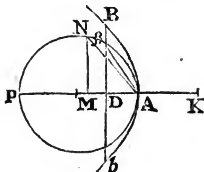
Quare

Quare $AE - DB = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}} +$ &c. Adde DB; & prodit $AE = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}} +$ &c. Hoc aufer de valore ipsius AE supra habito, & restabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}} +$ vel $-$ &c. Quare in AG cape AH quintam partem DA, & $KG = HC$, & actæ GBE, G*be* abscindent Tangentem E*e* quam proxime æqualem Arcui BA*b*; errore tantum existente $\frac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx} +$ vel $-$ &c. multo minore scilicet quam in Theoremate *Hugenii*. Quod si fiat $7AK : 3AH :: DH : n$; & capiatur $KG = CH - n$, erit error adhuc multo minor.

Atque ita, si Circuli segmentum aliquod BA*b* per Mechanicam designandum esset: Primo reducerem Aream istam in Infinitam Seriem, puta hanc $BbA = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}} -$ &c. Dein quærerem constructiones Mechanicas quibus hanc Seriem proxime assequerer; cujusmodi sunt hæ: Age rectam AB, & erit segmentum $BbA = \overline{\frac{2}{3}AB + BD} \times \frac{4}{5}AD$ proxime; existente scilicet errore tantum $\frac{x^3}{70d^2}\sqrt{dx} +$ &c, in defectu: Vel proximius, erit segmentum illud (bisecto AD in F, & acta recta BF) $= \frac{4BF + AB}{15} \times 4AD$; existente errore solummodo $\frac{x^3}{560d^2}\sqrt{dx} +$ &c; qui semper minor erit quam $\frac{1}{1500}$ totius segmenti, etiamsi segmentum illud ad usque semicirculum augeatur.

Sic & in Ellipsi BA*b*, [*Vid. Fig. præcedent.*] cujus vertex A, axis alteruter AK, & latus rectum AP, cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK - 21AP}{10AK} \times AD$. In Hyperbola vero, cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK + 21AP}{10AK} \times AD$. Et acta recta GBE abscindet tangentem AE quam proxime æqualem Arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodo Arcus ille non sit nimis magnus.

Et pro Area Segmenti Hyperbolici B*b*A; in DP cape $MD = \frac{3AD^2}{4AK}$, & ad D & M erige perpendicula Dβ, MN occurrentia semicirculo super Diametro AP descripto: Eritq; $\frac{4AN + A\beta}{15} \times 4AD = BbA$ proxime: Vel proximius, erit $\frac{21AN + 4A\beta}{75} \times 4AD = BbA$; si modo capiatur $DM = \frac{5AD^2}{7AK}$.



Cantabrigiæ
Junii 13. 1676.

Tuus, &c.
Is. Newton.

Q *Epistola*

Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgum, 27 Augusti 1676 *data, cum D.* Newtono *communicanda.*

Clarissimo Viro, D. Henrico Oldenburgio, Godefredus Guilielmus Leibnitius.

Literæ tuæ, die 26 *Julii* datæ, plura ac memorabiliora circa rem Analyticam continent, quam multa volumina spissa de his rebus edita. Quare tibi pariter ac Clarissimis Viris *Newtono* ac *Collinio* gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum esse voluistis.

Inventa *Newtoni* ejus ingenio digna sunt, quod ex Opticis Experimentis & Tubo Catadioptrico abunde eluxit.

Ejusque methodus inveniendi Radices Æquationum & Areas Figurarum, per Series Infinitas, prorsus differt a mea: Ut mirari libeat diversitatem itinerum per quæ eodem pertingere licet.

Mercator Figuras Rationales, seu in quibus Ordinatarum valor ex datis Abscissis rationaliter exprimi potest, (ut scilicet indeterminata Quantitas in vinculum non ingrediatur,) quadravit; & ad Infinitas Series reducere docuit, per Divisiones. *Newtonus* autem, per Radicum Extractiones. Mea Methodus Corollarium est tantum doctrinæ generalis de *Transformationibus*; cujus ope Figura proposita quælibet, quacunque Æquatione explicabilis, transmutatur in aliam Analyticam æquipollentem; talem ut, in ejus Æquatione, ordinatæ dimensio non ascendat ultra Cubum aut Quadratum, aut etiam Simplicem Dignitatem seu Infimum gradum. Ita fiet ut quælibet Figura, vel per Extractionem Radicis Cubicæ vel Quadraticæ, *Newtoni* more; vel etiam, Methodo *Mercatoris*, per simplicem Divisionem; ad Series Infinitas reduci queat.

Ego vero ex his Transmutationibus simplicissimam ad rem præsentem delegi. Per quam scilicet * unaquæque Figura transformatur in aliam æquipollentem rationalem; in cujus æquatione, Ordinata in nullam prorsus ascendit Potestatem: Ac proinde sola *Mercatoris* Divisione per Infinitam Seriem exprimi potest.

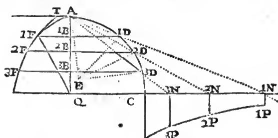
Ipsa porro * generalis Transmutationum methodus, mihi inter potissima Analyseos censenda videtur. Neque enim tantum ad Series Infinitas, & ad

* Hic modus transmutandi figuras Curvilineas in alias ipsis æquales, ejusdem est generis cum Transmutationibus *Barrovianis* & *Gregorianis*. Et Conicæ Sectiones hac Methodo semper ad Series Infinitas reduci possunt per divisiones. Generalis tamen non est: Nam si Curva sit secundi generis, incidetur in æquationem quadraticam; si tertii generis in cubicam, si quarti in quadrato-quadraticam, si quinti in quadrato-cubicam, &c. præterquam in casibus quibusdam valde particularibus. Per extractiones vero Radicum Problemata facilius solvuntur absque Transmutationibus.

& ad Approximationes; sed & ad solutiones Geometricas, aliaque innumera vix alioqui tractabilia inservit. Ejus vero fundamentum vobis candide libereque scribo; persuasus quæ apud vos habentur præclara mihi quoque non denegatum iri.

Transformationis fundamentum hoc est: Ut figura proposita rectis innumeris utcunque, modo secundum aliquam regulam sive legem ductis, resolvatur in partes; quæ partes, aut aliæ ipsis æquales, alio situ aliave forma reconjunctæ, aliam componant figuram priori æquipollentem seu ejusdem Areæ, etsi alia longe figura constantem. Unde ad Quadraturas absolutas, vel hypotheticas Geometricas, vel serie infinita expressas Arithmeticas, jamjam multis modis perveniri potest.

Ut intelligatur; Sit Figura AQCDA. Ea, ductis rectis BD parallelis, resolvi potest in Trapezia 1B 2D, 2B 3D, &c. Sed, ductis rectis convergentibus ED, resolvi potest in Triangula E 1D 2D, E 2D 3D, &c.



Si jam alia sit Curva A 1F 2F 3F, cujus Trapezia 1B 2F, 2B 3F sint Triangulis E 1D 2D, E 2D 3D ordine respondentibus æqualia, tota figura AE 3D 2D 1DA, toti figuræ A 1F 2F 3F 3B A erit æqualis.

Quinetiam Trapezia Trapeziis conferendo, fieri potest ut 1N 2P, vel quod eodem redit, Rectangulum 1N 2P, sit æquale Trapezio respondenti 1B 2D, sive Rectangulo 1B 2D; tametsi recta 1N 1P non sit æqualis rectæ 1B 1D, modo sit 1N 2N ad 1B 2B ut 1B 1D ad 1N 1P; quod infinitis modis fieri potest.

Quæ omnia talia sunt ut cuivis statim ordine progredienti, ipsa natura duce, in mentem veniant; contineantque Indivisibilium Methodum generalissime conceptam, nec (quod sciam) hactenus satis universaliter explicatam. Non tantum enim Parallelæ & Convergentes, sed & aliæ quæcunque certa lege ductæ, rectæ vel curvæ, adhiberi possunt ad Resolutionem. Quanta autem & quam abstrusa hinc duci possint, judicabit qui methodi universalitatem animo erit complexus. Certum enim est omnes Quadraturas hactenus notas, absolutas vel hypotheticas, nonnisi exigua ejus specimina esse.

Sed

Sed nunc quidem ſuffecerit applicationem oſtendere ad id de quo agitur; Series ſcilicet infinitas, & modum Transformandi figuram datam in aliam æquipollentem rationalem, *Mercatoris* Methodo tractandam.

AQCA ſit Quadrans Circuli: Radius $AQ = r$: Abſciſſa $A\,1B = x$: Ordinata $1B\,1D = y$: Æquatio pro Circulo $2rx - x^2 = y^2$. Ducatur recta $A\,1D$: producaturque donec ipſi QC etiam productæ occurrat in $1N$: Et $Q\,1N$ vocetur z. Et ** erit $A\,1B$ ſeu $x = \frac{2r^3}{r^2+z^2}$: Et $1B\,1D$ ſive $y = \frac{2zr^2}{r^2+z^2}$. Eodem modo, ductâ $A\,2D\,2N$, ſi $Q\,2N = z - \beta$ (poſita ſcilicet $1N\,2N = \beta$) erit $A\,2B = \frac{2r^3}{r^2+z^2-2z\beta+\beta^2}$; & $A\,2B - A\,1B$, ſive recta $1B\,2B$, erit $\frac{2r^3}{r^2+z^2-2z\beta+\beta^2} - \frac{2r^3}{r^2+z^2}$. Sive, poſita β infinite parva, (poſt deſtructiones & diviſiones,) erit $1B\,2B = \frac{4r^3z\beta}{\overline{r^2+z^2}|^2}$. Habita ergo recta $1B\,1D$, & recta $1B\,2B$, habebitur valor Rectanguli $1D\,2B$, multiplicatis eorum valoribus in ſe invicem; habebitur inquam $\frac{8r^5z^2\beta}{\overline{r^2+z^2}|^3}$ pro valore Rectanguli $1D\,2B$.

Sit jam Curvæ $1P\,2P\,3P$ &c. natura pro arbitrio aſſumpta talis, ut Ordinata ejus $1N\,1P$ (ex data abſciſſa $Q\,1N$ ſive z) ſit $\frac{8r^5z^2}{\overline{r^2+z^2}|^3}$. Ideo, quoniam $1N\,2N = \beta$, erit rectangulum $1P\,2N$, etiam $\frac{8r^5z^2\beta}{\overline{r^2+z^2}|^3}$. Ac proinde æquale Rectangulo $1D\,2B$, & ſpatium $1P\,1N\,3N\,3P\,2P\,1P$ æquale ſpatio Circulari reſpondenti $1D\,1B\,3B\,3D\,2D\,1D$. Eſt autem quælibet Ordinata NP rationalis, ex data abſciſſa QN; quia, poſitâ $QN = z$, Ordinata NP eſt $\frac{8r^5z^2}{\overline{r^2+z^2}|^3}$, ſive $\frac{8r^5z^2}{r^6+3r^4z^2-3r^2z^4+z^6}$. Ergo ipſa per Infinitam Seriem Integrorum exprimi poteſt, Dividendo. Et Spatium talibus Ordinatis comprehenſum, æquipollens Circulati, infinita Serie numerorum Rationalium, Methodo *Mercatoris* quadrari poteſt. Quod cum facillimum ſit facere hic omitto. Neque enim elegantiæ ſuæ, ſed Methodi Generalis explicandæ cauſa, hoc exemplum aſſumpſi.

Ita ſiquis loco Circuli mihi dediſſet Curvam, in qua Ordinata aſcendiſſet ad gradum Cubicum, potuiſſem eam reducere ad Curvam, in qua Ordinata non aſſurrexiſſet ultra Quadratum, vel etiam ne quidem ad Quadratum.

Ita-

** *N. B. D. Leibnitius* hanc Methodum vulgari more prolixius hic exponit, quam Analyſis ejus nova paucis exhibere potuiſſet, ideoque Analyſin illam novam nondum invenerat.

Itaque semper, sive Extractionibus Radicum *Newtonianis* (gradus cujuslibet dati), vel Divisionibus *Mercatoris*, poterit cujuslibet Figuræ spatium inveniri, interventu alterius æquipollentis. Multum autem ad Simplicitatem interest quid eligas.

Omnium vero possibilium Circuli, & Sectoris Conici Centrum habentis cujuslibet, per Series Infinitas quadraturarum, simplicissimam hanc esse dicere ausim quam nunc subjicio.

Sit QA 1F [*Vid. Fig. præcedent.*] Sector, duabus rectis in Centro Q concurrentibus & Curva Conica A 1F, ad Verticem A sive Axis extremum perveniente, comprehensus. Tangenti Verticis AT occurrat Tangens 1FT. Ipsum AT vocemus t; & Rectangulum sub Semi-latere Recto in Semi-latus Transversum sit Unitas. Erit † Sector Hyperbolæ, Circuli vel Ellipseos, per Semi-latus Transversum divisus, $= \frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7}$ &c. Signo ambiguo $\pm$ valente $+$ in Hyperbola, $-$ in Circulo vel Ellipsi. Unde, posito Quadrato Circumscripto 1, erit Circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. Quæ expressio, jam Triennio abhinc & ultra a me communicata amicis, haud dubie omnium possibilium simplicissima est maximeque afficiens mentem.

Unde duco Harmoniam sequentem; *

$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\frac{1}{120}$ &c. $= \frac{3}{4}$

$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{63} \quad \frac{1}{99}$ &c. $= \frac{2}{4}$

$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{80} \quad \frac{1}{120}$ &c. $= \frac{1}{4}$

$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{99}$ &c.

$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{120}$ &c.

Ubi $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. exprimit Aream Circuli ABCD, & $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120}$ &c. aream Hyperbolæ æquilateræ BCEF, cum sit BC dupla ipsius EF, & quadratum inscriptum $= \frac{1}{2}$. Numeri 3, 8, 15, 24, &c. sunt Quadrati Unitate minuti.

Vicissim, †† ex Seriebus Regressuum pro Hyperbola hanc inveni. Si sit numerus aliquis Unitate minor $1 - m$, ejusque Logarithmus Hyperbolicus l. Erit $m = \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} - \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. Si numerus sit major Unitate, ut $1 + n$; tunc pro eo inveniendo mihi etiam †† prodiit Regula, quæ in *Newtoni* Epistola expressa est; scilicet erit $n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} + \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. Prior tamen celerius appropinquat. Ideoque

† Vid. pag. 25, lin. 10, & pag. 41. lin. 8. * Vide Acta Lipsica *Feb.* 1682.

efficio ut ea poffim uti, etiam cum major eft Unitate numerus $1+n$. Nam idem eft Logarithmus pro $1+n$ & pro $\frac{1}{1+n}$. Unde, fi $1+n$ fit major Unitate, erit $\frac{1}{1+n}$ minor Unitate. Fiat ergo $1-m=\frac{1}{1+n}$, ac inventa m, habebitur & $1+n$ numerus quæfitus.

Quod regreffum ex Arcubus attinet, †† incideram ego directe in Regulam, quæ ex dato Arcu Sinum Complementi exhibet. Nempe, Sinus Complementi $= 1-\frac{a^2}{1\times2}+\frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. Sed poftea quoque deprehendi ex ea, illam nobis communicatam pro inveniendo Sinu Recto, qui eft $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\times2\times3}+\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c, poffe demonftrari. Quod tribus verbis fic fit. Summa Sinuum Complementi ad Arcum, feu omnium $1-\frac{a^2}{1\times2}+\frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. eft $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\times2\times3}+\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c. Porro, Summa Sinuum Complementi ad Arcum (feu Arcui in locis debitis infiftentium) æquatur Sinui Recto ducto in Radium, ut notum eft Geometris; id eft, æquatur ipfi Sinui Recto; quia Radius hic eft Unitas. Ergo Sinus Rectus $=\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\times2\times3}+\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c. Hinc etiam, ex dato Arcu & Radio, fine ulla prorfus aliorum notitia, haberi poteft Area Segmenti Circularis duplicati: quæ eft $\frac{a^3}{1\times2\times3}-\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$ &c. Unde optime Segmentorum Tabula ad Gradus & Minuta &c. calculabitur.

Pro Trigonometricis autem operationibus, percommoda mihi videtur hæc expreffio: Ut Sinus Complementi c ponatur $=1-\frac{a^2}{1\times2}+\frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$; quoniam fola, memoria retenta, omnibus cafibus & operationibus, directis fcilicet fimul & reciprocis, fufficit; Quod ideo fit, quoniam Æquatio $c=1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}$ eft plana. Unde fi viciffim quæras Arcum ex Sinu Complementi, radix extrahi poteft; adeoque fiet Arcus $a=\sqrt{6-\sqrt{24c+12}}$ exacte fatis ad ufum eorum qui in itineribus Tabularum commoditate carent; quia error æquationis non eft $\frac{a^6}{720}$.

†† *N.B.* Methodum perveniendi ad has Series *Leibnitius* a *Newtono* jam modo acceperat, idque ex ipfius rogatu. Imo Series ipfas a *Newtono* una cum Methodo perveniendi ad eafdem jam modo acceperat, & pro Hyperbola fignum tantum mutavit; pro Circulo Sinum Verfum a *Newtono* acceptum fubduxit a Radio, ut haberet Sinum complementi.

Innu-

Innumera alia possent dici, quæ his fortasse elegantia & exactitudine non cederent. Sed ego ita sum comparatus ut plerumque, Methodis Generalibus detectis, rem in potestate habere contentus, reliqua libenter aliis relinquam. Neque enim ista omnia magnopere æstimanda sunt, nisi quod artem Inveniendi perficiunt, mentemque excolunt. Si quæ obscuriora videbuntur, ea libenter elucidabo: Et illud quoque explicabo, quomodo hac Methodo Æquationum quoque utcunque Affectarum Radices per Infinitam Seriem dari possint, sine ulla Extractione; quod mirum fortasse videbitur.

Sed desideraverim ut Clarissimus *Newtonus* nonnulla quoque amplius explicet; ut Originem Theorematis quod initio ponit: Item, Modum quo quantitates p, q, r, in suis Operationibus invenit: Ac denique, Quomodo in Methodo Regressuum se gerat, ut cum ex Logarithmo quærit Numerum. Neque enim explicat quomodo id ex Methodo sua derivetur.

Nondum mihi licuit ejus Literas qua merentur diligentia legere: quoniam tibi e vestigio respondere volui. Unde non satis nunc quidem affirmare ausim, an nonnulla eorum quæ suppressit, ex sola earum lectione consequi possum. Sed optandum tamen foret, ipsum ea potius supplere *Newtonum*: Quia credibile est, non posse eum scribere, quin aliquid semper præclari nos doceat (ut apparet) egregiarum meditationum plenus.

Ad alia tuarum literarum venio; quæ Doctissimus *Collinius* communicare gravatus non est. Vellem adjecisset appropinquationis *Gregorianæ* linearis Demonstrationem. Credo tamen aliam haberi simpliciorem, etiam in infinitum euntem; quæ fiat sine ulla Bisectione Anguli, imo, sine supposita Circuli Constructione; solo Rectarum ductu.

Vellem *Gregoriana* omnia conservari. Fuit enim his certe studiis promovendis aptissimus: Cæterum ejus demonstrationi editæ, de Impossibilitate Quadraturæ absolutæ Circuli & Hyperbolæ, multa haud dubie desunt.

De Æquationum Radicibus Surdis Generalibus inveniendis; sive, quod idem est, tollendis Æquationum potestatibus intermediis, multa & ego meditatus sum; & jam Vere anni superioris Specimina *Hugenio* communicaveram Regularum *Cardanicis* similium. Seriem enim habebam ejusmodi Regularum in infinitum euntem; in quibus & *Cardanica* continebatur. Sed ultra gradum Cubicum non erant Generales. Perspexi tamen inde veram Methodum progrediendi longius. Quamquam multis adhuc opus sit artibus, quas excutiendas libenter ingeniosissimo *Tschürnhausio* relinquo; qui hic ad eadem quæ ego habebam Specimina, imo & alia præterea, etiam de suo pervenit.

Ex iis quæ *Collinius* ait de *Gregoriana* Methodo, difficile non fuit nobis certo divinare in quo consistat ejus substantia.

Imagi-

Imaginariarum quantitatum in Realium Radicum expressiones ingredientium sublationem, frustra putem sperari, imo quæri. Neque enim illæ ullo modo vel Calculis vel Constructionibus obsunt: Et Veræ Realesque sunt Quantitates, si inter se conjunguntur, ob destructiones virtuales. Quod multis elegantibus Exemplis & Argumentis deprehendi.

Exempli gratia, $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$. Tametsi enim neque ex Binomio $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$, neque ex Binomio $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ radix extrahetur; nec proinde sic destruetur imaginaria $\sqrt{-3}$: supponenda tamen est destructa esse virtualiter, quod actu appareret si fieri posset Extractio. Alia tamen via hæc summa reperitur esse $\sqrt{6}$. Unde in Cubicis Binomiis ubi realitas ejusmodi formularum (tunc cum Extractio ex singulis Binomiis fieri nequit) ad oculum ostendi non potest; mente tamen intelligitur. Quare frustra *Cartesius* aliique expressiones *Cardanicas* pro particularibus habuere. Siquis posset invenire Quadraturam Circuli & ejus Partium, ex data Hyperbolæ & ejus Partium quadratura, is posset eas tollere; modo in ipsam Quadraturam imaginariæ illæ rursus ingrediantur.

Cæterum ex illis quas habeo meditationibus circa Radices æquationum irrationales, necessario sequitur res satis Paradoxa: Scilicet omnes Æquationes gradus Octavi, Noni, Decimi, posse ad gradum Septimum reduci. Itaque & omnia Problemata ad Decimum gradum usque occurrentia possunt ad Septimum deprimi.

Horribiles Calculi subeundi erunt illi qui in hoc Argumentum velut per vim irrumpet; sed facillimi ipsi qui ante meditabitur: cum, ut prævideo, ipsa natura rei ducat ad compendia quædam, per quæ spes est Calculi magnam partem abscindi; remque elegantibus artificiis, Ingenii potius vi quam Calculi labore, transigi posse.

Sed siquis laborem non subterfugeret, eum docere possum Methodum Analyticam generalem infallibilem, per quam omnium Æquationum radices generales invenire liceret.

Verum meliora illis proponerem agenda qui Calculo delectarentur. Consilium enim habeo Tabularum Analyticarum, quæ non minoris futuræ essent usus in Analysi, quam Tabulæ Sinuum in Geometria Practica; imo, arbitror, qui paulum in iis calculandis versatus sit, eum progressiones reperturum in infinitum, quarum ope magna Tabulæ pars sine labore continuari possit. Nihil est quod norim in tota Analysi momenti majoris. Nam in his Tabulis pleraque Problemata statim soluta haberentur, aut levi opera possint inde deduci.

Pendet negotium ex re longe majore, Arte scilicet Combinatoria generali ac vera. Cujus vim ac potestatem nescio an quisquam hactenus sit consequutus. Ea vero nihil differt ab Analysi illa suprema, ad cujus intima, quantum judicare possum, *Cartesius* non pervenit. Est enim ad eam constituendam opus Alphabeto Cogitationum humanarum. Et ad inventionem ejus Alphabeti, opus est Analysi Axiomatum. Sed non miror

ror

ror ista nemini satis considerata: Quia plerumque facilia negligimus; & multa, quæ clara videntur, assumimus. Quod quamdiu faciemus, nunquam ad illud perveniemus, quod mihi videtur in rebus intellectualibus summum; nec genus Calculi etiam non-Mathematicis accommodati obtinebimus.

Optarim Cl. *Pellium* generalia sua Meditata, & illud speciatim quod memoras *Cribrum Eratosthenis*, non supprimere. Nam etsi omnia forte quæ destinarat non absolverit; meditata tamen ipsa & Consilia egregiorum Virorum non perire publici interest. Utilia quoque futura sunt quæ de Sinuum Tabula ad Æquationes accommodanda habet. Item de Limitibus & Radicibus.

Quod dicere videmini, plerasque difficultates (exceptis Problematibus *Diophantæis*) ad Series Infinitas reduci; id mihi non videtur. Sunt enim multa usque adeo mira & implexa, ut neque ab Æquationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia sunt (ex multis aliis) Problemata * methodi Tangentium inversæ; quæ etiam *Cartesius* in potestate non esse fassus est.

In tomo 3° Epistolarum, una habetur ad *Beaunium*; in qua, ad propositas a *Beaunio*, Curvas quasdam invenire conatur; quarum una est Ludus Naturæ, ut intervallum inter Tangentem ad (axem) directricem usque productam & Ordinatim-applicatam ex Curva ad directricem sit semper idem; recta scilicet constans. Hanc Curvam nec *Cartesius* nec *Beaunius* nec quisquam alius (quod sciam) invenit. Ego vero qua primum die, imo hora, cœpi quærere, statim certa Analysi solvi. Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere desiderari potest consecutum: quamquam maximi momenti esse sciam. Ac de his quidem nunc satis.

Ego id agere constitui, ubi primum otium nactus ero, ut rem omnem Mechanicam reducam ad puram Geometriam; problemataque circa Elateria, & Aquas, & Pendula, & Projecta, & Solidorum Resistentiam, & Frictiones, &c. definiam. Quæ hactenus attigit nemo. Credo autem rem omnem nunc esse in potestate; ex quo circa Regulas Motuum mihi penitus perfectis demonstrationibus satisfeci; neque quicquam amplius in eo genere desidero. Tota autem res, quod mireris, pendet ex Axiomate Metaphysico pulcherrimo; quod non minoris est momenti circa Motum, quam hoc, *totum esse majus parte*, circa magnitudinem.

De Centro-baricis quoque singularem quendam aditum reperi ad novas ac plane a prioribus diversas contemplationes, in Geometria pariter ac Mechanica magno usui futuras. Hæc ubi (Deo volente) absolvero, reliquum temporis, quod scilicet Philosophicis meditationibus destinare fas erit, Naturæ indagationi debeo.

Tschürnhausius proximo Tabellione scribet.

* Si æquationes differentiales D. *Leibnitio* jam innotuissent, haud dixisset Problemata Methodi Tangentium inversæ ab Æquationibus non pendere.

Excerpta ex Epistola D. Ehrenfried de Tschürnhause *ad D.* Oldenburgum, Parisiis 1° Septemb. 1676 *data, cujus extat exemplar manu D.* Collins *descriptum.*

EXpectabam cum desiderio responsum, cum aliquot abhinc mensibus ad te literas meas transmiseram; sed nec ex modo datis colligere licet has receptas fuisse. Interim admodum oblectatus fui, hisce conspectis quæ ad D. *Leibnitium* exarasti; maximeque me tibi devinxisti, quod me participem volueris facere tam ingeniosarum inventionum, & promotionis Geometriæ tam pulchræ quam utilis. Statim cursim eas pervolvi, ut viderem num forte inter hasce Series Infinitas existeret * ea qua ingeniosissimus D. *Leibnitius* Circulum, imo quamvis sectionem Conicam (centro in finita distantia gaudentem) quadravit, tali ratione ut mihi persuadeam simpliciorem viam, nec quoad linearem constructionem, nec numeralem expressionem, nunquam visum iri; quique hisce porro insistens, generalem adinvenit Methodum Figuram quamvis datam in talem rationalem transmutandi, quæ per solum inventum (admodum præstans meo judicio) D. *Mercatoris*, ad Seriem Infinitam posset reduci; sed hac de materia, cum ipse non ita pridem mentem suam declaravit, non opus est ut prolixior sim. Verum ut ad specimina perquam ingeniosa D. *Newtoni* revertar, hæc non potuere non mihi placere, tam ob utilitatem qua se tam late ad quarumvis quantitatum dimensiones, ac alia difficilia enodanda in Mathematicis extendunt, quam ob deductionem harum a fundamentis non minus generalibus quam ingeniosis derivatam: non obstante quod existimem, ad quantitatem quamvis ad infinitam seriem æquipollentem reducendam, fundamenta adhuc dari & simpliciora & universaliora, quam sunt fractionum & irrationalium reductio ad tales Series, ope Divisionis aut Extractionis; quæ mihi tale quid non nisi per accidens præstare videntur: cum hæc successum quoque habeant, licet non adsint fractiones aut irrationales Quantitates. Similia porro * quæ in hac re præstitit eximius ille Geometra *Gregorius* memoranda certe sunt, & quidem optime famæ ipsius consulturi, qui ipsius relicta Manuscripta luci publicæ ut exponantur operam navabunt.

* Annon D. *Tschürnhause* viderat Excerpta ex *Gregorii* Epistolis cum D. *Leibnitio* communicata, ubi habetur Series *Gregorii* quam *Leibnitio* hic tribuit? Vide pag. 46 & 47.

Epistola

Epistola D. Newtoni *posterior, ad D.* Oldenburgum, *Octob.* 24 1676 *data, cum D.* Leibnitio *communicanda.*

Vir Dignissime,

QUanta cum voluptate legi Epistolas Clarissimorum Virorum D. *Leibnitii* & D. *Tschürnhausii* vix dixerim.

Perelegans sane est *Leibnitii* methodus perveniendi ad Series Convergentes: & satis ostendisset ingenium Authoris, etsi nihil aliud scripsisset. Sed quæ alibi per Epistolam sparsit suo nomine dignissima efficiunt etiam ut ab eo speremus maxima. Diversitas modorum quibus eodem tenditur eo magis placuit, quod mihi tres Methodi perveniendi ad ejusmodi Series innotuerant; adeo ut novam nobiscum communicandam vix expectarem.

Unam e meis prius descripsi: jam addo aliam; illam scilicet qua primum incidi in has Series. Nam incidi in eas antequam scirem Divisiones & Extractiones Radicum quibus jam utor. Et hujus explicatione pandendum est fundamentum Theorematis sub initio Epistolæ prioris positi, quod D. *Leibnitius* a me desiderat.

Sub initio studiorum meorum Mathematicorum, ubi incideram in * opera Celeberrimi *Wallisii* nostri, considerando Series quarum intercalatione ipse exhibet Aream Circuli & Hyperbolæ; utpote quod in Serie Curvarum, quarum Basis seu Axis communis sit x, & Ordinatim-applicatæ $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}.$ $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}.$ $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}.$ $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}.$ $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}.$ $\overline{1-xx}|^{\frac{5}{2}}.$ &c. si Areæ alternarum quæ sunt x, $x-\frac{1}{3}x^3$, $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, $x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ &c. interpolari possent, haberemus Areas intermediarum; quarum prima $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$ est Circulus: ad has interpolandas notabam, quod in omnibus, primus terminus esset x, quodque secundi termini $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, &c. essent in Arithmetica progressione; & proinde quod duo primi termini Serierum intercalandarum deberent esse $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{5}{2}x^3}{3}$, &c.

Ad reliquas intercalandas considerabam, quod Denominatores 1, 3, 5, 7, &c. erant in Arithmetica progressione; adeoque solæ Numeratorum Coefficientes numerales essent investigandæ. Hæ autem in alternis datis Areis erant figuræ potestatum numeri undenarii; nempe harum 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4. Hoc est, primo 1; deinde 1, 1; tertio 1, 2, 1; quarto 1, 3, 3, 1; quinto 1, 4, 6, 4, 1; &c.

* Vide D. *Wallisii* Arithmeticam infinitorum, Prop. 118, 121, &c. Ejusque Algebram, Cap. 82.

Quærebam

Quærebam itaque, quomodo in his Seriebus, ex datis duabus primis figuris, reliquæ derivari possent. Et inveni quod posita secunda figura m, reliquæ producerentur per continuam multiplicationem terminorum hujus Seriei, $\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}$ &c.

Exempli gratia; Sit (terminus secundus) $m = 4$; & erit $4 \times \frac{m-1}{2}$, hoc est 6, tertius terminus; & $6 \times \frac{m-2}{3}$, hoc est 4, quartus; & $4 \times \frac{m-3}{4}$, hoc est 1, quintus; & $1 \times \frac{m-4}{5}$, hoc est 0, sextus; quo series in hoc casu terminatur.

Hanc Regulam itaque applicui ad Series interserendas. Et cum, pro Circulo, secundus terminus esset $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, posui $m = \frac{1}{2}$; & prodierunt termini $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$ sive $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}$ sive $+\frac{1}{16}$; $+\frac{1}{16} \times \frac{\frac{1}{2}-3}{4}$ sive $-\frac{5}{128}$; & sic in infinitum. Unde cognovi desideratam Aream segmenti Circularis esse $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$ &c.

Et eadem ratione prodierunt etiam interserendæ areæ reliquarum Curvarum: ut & area Hyperbolæ & cæterarum alternarum in hac Serie $\overline{1+xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{3}{2}}$, &c.

Et eadem est ratio intercalandi alias Series, idque per intervalla duorum pluriumve terminorum simul deficientium.

Hic fuit primus meus ingressus in has meditationes: qui e memoria sane exciderat, nisi oculos in adversaria quædam ante paucas septimanas retulissem.

Ubi vero hæc didiceram, mox considerabam terminos $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{6}{2}}$, &c. hoc est, 1, $1-xx$, $1-2xx+x^4$, $1-3xx+3x^4-x^6$, &c. eodem modo interpolari posse ac areas ab ipsis generatas: & ad hoc nihil aliud requiri quam omissionem denominatorum 1, 3, 5, 7, &c. in terminis exprimentibus areas; hoc est, coefficientes terminorum quantitatis intercalandæ $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, vel $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$, vel generaliter $\overline{1-xx}|^{m}$, prodire per continuam multiplicationem terminorum hujus Seriei $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

Adeoque (exempli gratia) $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, valeret $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ &c. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$ valeret $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}z^6$ &c. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{3}}$ valeret $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$ &c.

Sic itaque innotuit mihi generalis Reductio Radicalium in infinitas Series, per Regulam quam posui initio Epistolæ prioris, antequam scirem Extractiones Radicum.

Sed,

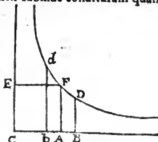
Sed, hac cognita, non potuit altera me diu latere. Nam ut probarem has operationes, multiplicavi $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ &c. in se; & factum est $1 - xx$, terminis reliquis in infinitum evanescentibus per continuationem seriei. Atque ita $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$ &c. bis in se ductum produxit $1 - xx$. Quod, ut certa fuerit harum conclusionum Demonstraiio, sic me manuduxit ad tentandum e converso, num hæ Series, quas sic constitit esse Radices quantitatis $1 - xx$, non possent inde extrahi more Arithmetico. Et res bene successit. Operationis forma in Quadraticis Radicibus hæc erat.

$$
\begin{array}{l}
1 - xx \; (1 - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \text{ \&c.} \\
\underline{1 \qquad\quad} \\
0 - xx \\
\underline{\;\; - xx + \frac{1}{4}x^4} \\
\qquad\quad - \frac{1}{4}x^4 \\
\qquad\quad \underline{- \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{64}x^8} \\
\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{64}x^8
\end{array}
$$

His perspectis neglexi penitus interpolationem Serierum; & has operationes tanquam fundamenta magis genuina solummodo adhibui. Nec latuit Reductio per Divisionem; res utique facilior.

Sed & Resolutionem affectarum Æquationum mox aggressus sum, eamque obtinui. Unde simul Ordinatim-applicatæ, Segmenta Axium, aliæque quælibet Rectæ, ex Areis Curvarum vel Arcubus datis innotuere. Nam regressio ad hæc nihil indigebat præter Resolutionem Æquationum, quibus Areæ vel Arcus ex datis rectis dabantur.

Eo tempore Pestis ingruens, [*quæ contigit annis 1665, 1666,*] coegit me hinc fugere, & alia cogitare. Addidi tamen subinde condituram quandam Logarithmorum ex Area Hyperbolæ, quam hic subjungo.



Sit dFD Hyperbola, cujus Centrum C, Vertex F, & Quadratum interjectum CAFE $= 1$. In AC cape AB, Ab hinc inde $= \frac{1}{10}$ seu 0.1: Et, erectis perpendiculis BD, bd ad Hyperbolam terminatis, erit semi-summa spatiorum AD & $Ad = 0.1 + \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{5} + \frac{0.0000001}{7}$ &c. et semi-differentia $= \frac{0.01}{2} + \frac{0.0001}{4} + \frac{0.000001}{6} + \frac{0.00000001}{8}$ &c. Quæ reductæ sic se habent,

0.1000000000000	0.0050000000000
3333333333	250000000
20000000	1666666
142857	12500
1111	100
9	1
0.1003353477310	0.0050251679267

T

Horum

Horum summa 0.1053605156577 est Ad; & differentia 0.0953101798043 est AD. Et eadem ratione, positis AB, Ab hinc inde = 0.2, obtinebitur Ad = 0.2231435513142, & AD = 0.1823215567939. Habitis sic Logarithmis Hyperbolicis numerorum quatuor decimalium 0.8, 0.9, 1.1, & 1.2; cum sit $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$; & 0.8 & 0.9, sint minores Unitate: adde Logarithmos eorum ad duplum Logarithmi 1.2, & habebis 0.6931471805597 Logarithmum Hyperbolicum numeri 2. Cujus triplo adde Log. 0.8 (siquidem sit $\frac{2 \times 2 \times 2}{0.8} = 10$,) & habebis 2.3025850929933 Logarithmum numeri 10: Indeque per Additionem simul prodeunt Logarithmi numerorum 9 & 11: Adeoque omnium Primorum horum 2, 3, 5, 11 Logarithmi in promptu sunt. Insuper, ex sola depressione numerorum superioris computi per loca Decimalia & Additione, obtinentur Logarithmi Decimalium 0.98, 0.99, 1.01, 1.02; ut & horum 0.998, 0.999, 1.001, 1.002. Et inde per Additionem & Subductionem prodeunt Logarithmi Primorum 7, 13, 17, 37, &c. Qui una cum superioribus, per Logarithmum numeri 10 divisi, evadunt veri Logarithmi in Tabulam inserendi. Sed hos postea propius obtinui.

Pudet dicere ad quot figurarum loca has computationes otiosus eo tempore produxi. Nam tunc sane nimis delectabar inventis hisce. Sed ubi prodiit ingeniosa illa * *Nicolai Mercatoris* Logarithmotechnia (quem suppono sua primum invenisse) cœpi ea minus curare; suspicatus, vel eum nosse Extractionem Radicum æque ac Divisionem Fractionum; vel alios saltem, Divisione patefacta, inventuros reliqua, prius quam ego ætatis essem maturæ ad scribendum.

Eo ipso tamen tempore quo liber iste prodiit, communicatum est per amicum D. *Barrow* (tunc Matheseos Professorem *Cantab.*) cum D. *Collinio*, † compendium quoddam Methodi harum Serierum; in quo significaveram Areas & Longitudines Curvarum omnium, & Solidorum superficies & Contenta, ex datis Rectis; & vice versa, ex his datis Rectas determinari posse: & Methodum ibi indicatam illustraveram diversis seriebus.

Suborta deinde inter nos Epistolari consuetudine; D. *Collinius*, Vir in rem Mathematicam promovendam natus, non destitit suggerere ut hæc publici

* Mathematici priores invenerunt hoc Theorema, quod *summa terminorum progressionis Geometricæ in infinitum pergentis est ad terminorum primum & maximum, ut hic terminus ad differentiam duorum terminorum primorum.* Idem demonstratur Arithmetice multiplicando extrema & media. Demonstravit *Wallisius* dividendo rectangulum sub mediis per extremum ultimum. Vide *Wallisii* opus Arithmeticum Anno 1657 editum cap.33. §68. Per *Wallisii* divisionem *Mercator* demonstravit Quadraturam Hyperbolæ a D. *Brounker* prius inventam. Et *Gregorius* idem demonstravit Geometrice. Sed horum nemo methodum generalem quadrandi curvas per divisionem invenit. *Mercator* hoc nunquam professus est. *Gregorius* ejusmodi methodum, licet vir acutissimus & literis *Collinii* admonitus, vix tandem invenit. *Newtonus* invenit per interpolationem Serierum, & postea divisionibus & extractionibus radicum ut notioribus usus est.

† Analysin intelligit per Æquationes Infinitas supra impressam, de qua vid. pag. 1, 2, 3.

publici juris facerem. Et ante annos quinque [1671] cum suadentibus amicis consilium ceperam edendi Tractatum de Refractione Lucis, & Coloribus, quem tunc in promptu habebam; cœpi de his Seriebus iterum cogitare; & ** Tractatum de iis etiam conscripsi, ut utrumque simul ederem.

Sed, ex occasione Telescopii Catadioptrici, Epistolâ ad te missâ qua breviter explicui conceptus meos de Natura Lucis, inopinatum quiddam effecit ut mei interesse sentirem ad te festinanter scribere de Impressione istius Epistolæ. Et subortæ statim per diversorum Epistolas (Objectionibus aliisque refertas) crebræ interpellationes me prorsus a consilio deterruerunt; & effecerunt ut me arguerem imprudentiæ, quod umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem.

Sub eo tempore *Jacobus Gregorius*, ex unica quadam Serie e meis quam D. *Collinius* ad eum transmiserat, post multam considerationem (ut ad *Collinium* rescripsit) pervenit ad eandem Methodum, & Tractatum de ea reliquit quem speramus ab Amicis ejus editum iri. Siquidem pro ingenio quo pollebat non potuit non adjicere de suo nova multa, quæ rei Mathematicæ interest ut non pereant.

Ipse autem Tractatum meum non penitus absolveram, ubi destiti a proposito; neque in hunc diem mens rediit ad reliqua adjicienda. Deerat quippe pars ea qua decreveram explicare modum solvendi Problemata, quæ ad Quadraturas reduci nequeunt; licet aliquid de Fundamentis ejus posuissem. Cæterum in Tractatu isto, Series Infinitæ non magnam partem obtinebant.

Alia haud pauca congessi, inter quæ erat Methodus ducendi Tangentes, quam solertissimus *Slusius* ante annos duos tresve tecum communicavit; de qua tu (suggerente *Collinio*) rescripsisti eandem †† mihi etiam innotuisse. Diversa ratione in eam incidimus. Nam res non eget Demonstratione prout ego operor. Habito meo Fundamento nemo potuit Tangentes aliter ducere, nisi volens de recta via deviaret.

Quinetiam non hic hæretur ad Æquationes Radicalibus unam vel utramque Indefinitam Quantitatem involventibus utcunque affectas; sed absque aliqua talium Æquationum Reductione (quæ opus plerumque redderet immensum) Tangens confestim ducitur. Et eodem modo se res habet in quæstionibus de Maximis & Minimis; aliisque quibusdam, de quibus jam non loquor.

Funda-

** Hujus Tractatus meminit D. *Collins* in Epistolis duabus supra impressis, pag. 27, 28.

†† Vide Epistolam *Newtoni* supra impressam, pag. 29, 30.

Fundamentum harum Operationum, ſatis obvium quidem, (quoniam jam non poſſum Explicationem ejus proſequi,) ſic potius celavi * *6accdæ 13eff7i3l9n4o4qrr4ſ9t12vx.*

Hoc fundamento conatus ſum etiam reddere † ſpeculationes de Quadratura Curvarum ſimpliciores; pervenique ad Theoremata quædam generaliora. Et, ut candide agam, ecce primum Theorema.

Ad Curvam aliquam ſit $dz^{\theta} \times \overline{e + fz^{n}}|^{\lambda}$ Ordinatim-applicata, termino abſciſſæ ſeu baſis z normaliter inſiſtens: ubi literæ d, e, f denotant quaſlibet quantitates Datas; & θ, n, λ indices Poteſtatum ſive Dignitatum quantitatum quibus affixæ ſunt. Fac $\frac{\theta + 1}{n} = r$, $\lambda + r = s$, $\frac{d}{nf} \times \overline{e + fz^{n}}|^{\lambda + 1} = Q$, & $rn - n = \varpi$: & Area Curvæ erit Q in $\frac{z^{\varpi}}{s} - \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{n}} + \frac{r-2}{s-2} \times \frac{eB}{fz^{n}} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{eC}{fz^{n}} + \frac{r-4}{s-4} \times \frac{eD}{fz^{n}}$ &c. literis A, B, C, D &c. denotantibus terminos proxime antecedentes; nempe A terminum $\frac{z^{\varpi}}{s}$, B terminum $- \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{n}}$ &c. Hæc Series, ubi r fractio eſt vel numerus negativus, continuatur in infinitum; ubi vero r integer eſt & affirmativus, continuatur ad tot terminos tantum quot ſunt Unitates in eodem r; & ſic exhibet Geometricam Quadraturam Curvæ. Rem Exemplis illuſtro.

Exemplum 1. Proponatur Parabola, cujus Ordinatim-applicata ſit $\sqrt{az}$. Hæc in formam Regulæ reducta fit $z^{0} \times \overline{0 + az^{1}}|^{\frac{1}{2}}$. Quare $d = 1$, $\theta = 0$, $e = 0$, $f = a$, $n = 1$; $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = 1$, $s = 1\frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$, $\varpi = 0$. Et erit Area quæſita $\frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$; hoc eſt, $\frac{2}{3} z \sqrt{az}$. Et ſic in genere, ſi cz^{n} ponatur Ordinatim-applicata, prodibit Area $\frac{c}{n+1} z^{n+1}$.

Exempl. 2. Sit Ordinatim-applicata $\frac{a^{4}z}{c^{4} - 2cczz + z^{4}}$. Hæc per Reductionem fit $a^{4}z \times \overline{cc - zz}|^{-2}$; vel etiam $a^{4}z^{-3} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-2}$. In priori

caſu

* Hoc eſt, *Data Æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire; & vice verſa.* Prior pars Problematis ſolvitur per Regulam Binomii initio Epiſtolæ ſuperioris *Newtonianæ* traditam & initio hujus demonſtratam. Nam ſi terminus ſecundus Binomii ſit momentum termini primi, terminus ſecundus Seriei, in quam dignitas Binomii per Regulam illam reſolvitur, erit momentum Dignitatis Binomii. Poſterior pars Problematis ſolvitur regrediendo a momentis ad fluentes: quod ubi hæretur fieri ſolet quadrando figuras; & ubi ad quadraturas hæretur, extrahendo fluentes per Regulas quatuor, quarum duas *Newtonus* in Epiſtola priore explicuit, duas alias ſub finem hujus Epiſtolæ literis tranſpoſitis occultavit, ut mox dicetur.

† Hujuſmodi Theoremata *Newtono* ante annum 1669 innotuiſſe patet, per Analyſin ſupra impreſſam pag. 18, lin. 31, ut & per hanc Epiſtolam.

casu est $d = a^4$, $\theta = 1$, $e = cc$, $f = -1$, $\eta = 2$, $\lambda = -2$. Adeoque $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2} \times \overline{cc - zz}|^{-1}$, hoc est $-\frac{a^4}{2cc - 2zz}$, $\pi = 0$. Et Area Curvæ Q in $-\frac{z^0}{1}$, id est $= \frac{a^4}{2cc - 2zz}$. In secundo autem casu, est $d = a^4$, $\theta = -3$, $e = -1$, $f = cc$, $\eta = -2$, $\lambda = -2$, $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2cc} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-1}$, id est $-\frac{a^4zz}{2c^4 - 2cczz}$, $\pi = 0$. Et Area $= Q$ in $-\frac{z^0}{1}$, hoc est $\frac{a^4zz}{2c^4 - 2cczz}$. Area his casibus diversimode exhibetur, quatenus computatur a diversis finibus, quorum assignatio per hos inventos valores Arearum facilis est.

Exempl. 3. Sit Ordinatim-applicata $\frac{a^5}{z^5}\sqrt{bz + zz}$: hoc est, per Reductionem ad debitam formam; vel $a^5z^{-\frac{9}{2}} \times \overline{b + z}|^{\frac{1}{2}}$; vel $a^5z^{-4} \times \overline{1 + bz^{-1}}|^{\frac{1}{2}}$. Et erit, in priori casu, $d = a^5$, $\theta = -\frac{9}{2}$, $e = b$, $f = 1$, $\eta = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = -\frac{7}{2}$, &c. Quare, cum r non sit numerus affirmativus, procedo ad alterum casum. Hic est $d = a^5$, $\theta = -4$, $e = 1$, $f = b$, $\eta = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoq; $r = 3$, $s = 3\frac{1}{2}$, $Q = -\frac{a^5}{b} \times \overline{1 + bz^{-1}}|^{\frac{3}{2}}$, seu $-\frac{a^5z + a^5b}{bzz}\sqrt{zz + bz}$, $\pi = -2$. Et Area, Q in $\frac{z^{-2}}{3\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}b} + \frac{1}{1\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^0}{3\frac{1}{2}bb}$, hoc est $\frac{-30bb + 24bz - 16zz}{105bbzz}$, in $\frac{a^5z + a^5b}{bzz}\sqrt{zz + bz}$.

Exempl. 4. Sit denique Ordinatim-applicata $\frac{bz^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{5: c^3 - 3accz^{\frac{2}{3}} + 3aacz^{\frac{4}{3}} - a^3zz}}$. Hæc ad formam Regulæ reducta, fit $bz^{\frac{1}{3}} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Indeque est $d = b$, $\theta = \frac{1}{3}$, $e = c$, $f = -a$, $\eta = \frac{2}{3}$, $\lambda = -\frac{3}{5}$, $r = 2$, $s = \frac{7}{5}$, $Q = -\frac{3b}{2a} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$, $\pi = \frac{2}{3}$. Et Area $Q \times \frac{5z^{\frac{2}{3}}}{7} - \frac{5}{2} \times -\frac{5c}{7a}$, id est $-\frac{30abz^{\frac{2}{3}} + 75bc}{28aa} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$. Quod si res non successisset in hoc casu, existente r vel fractione vel numero negativo; tunc tentassem alterum casum, purgando terminum $-az^{\frac{2}{3}}$ in Ordinatim-applicata a Coefficiente $z^{\frac{2}{3}}$; hoc est reducendo Ordinatim-applicatam ad hanc formam, $bz^{-\frac{11}{15}} \times \overline{-a + cz^{-\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Et si r in neutro casu fuisset numerus integer & affirmativus, conclusissem Curvam ex earum numero esse quæ non possunt Geometrice quadrari. Nam, quantum animadverto, hæc Regula exhibet in infinitis Æquationibus Areas omnium Geometricam Quadraturam admittentium Curvarum, quarum Ordinatim-applicatæ constant ex Potestatibus, Radicibus,

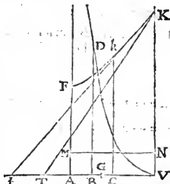
vel quibuslibet Dignitatibus Binomii cujuscunque: licet non directe, ubi index Dignitatis est numerus Integer.

At, quando hujusmodi Curva aliqua non potest Geometrice quadrari; sunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum Conicis Sectionibus, vel saltem cum aliis Figuris Simplicissimis quibuscum potest comparari: ad quod sufficit etiam hoc ipsum unicum jam descriptum Theorema, si debite concinnetur.

Pro Trinomiis etiam, & aliis quibusdam, Regulas quasdam concinnavi.

Sed in simplicioribus vulgoque celebratis Figuris, vix aliquid relatu dignum reperi quod evasit aliorum conatus; nisi forte *Longitudo Cissoidis* ejusmodi censeatur. Ea sic construitur.

Sit VD Cissois, AV Diameter Circuli ad quem aptatur, V Vertex, AF Asymptota ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demissum. Cum semi-axe AF = AV, & semi-parametro AG = $\frac{1}{3}$AV, describatur Hyperbola FkK; & inter AB & AV sumpta AC media proportionali, erigantur ad C & V perpendicula Ck, VK Hyperbolæ occurrentia in k & K; Et agantur rectæ KT, kt tangentes Hyperbolam in eisdem K & k, & occurrentes AV in T & t; & ad AV constituatur rectangulum AVNM æquale spatio TKkt. Et Cissoidis VD longitudo erit Sextupla altitudinis VN. Demonstratio perbrevis est. Sed ad Infinitas Series redeo.



Quamvis multa restent investiganda circa modos approximandi, & diversa Serierum genera quæ possunt ad id conducere: tamen vix cum D. *Tschürnhausio* speraverim dari posse aut simpliciora aut magis generalia fundamenta reducendi Quantitates ad hoc genus Serierum, de quo agimus, quam sunt Divisiones & Extractiones Radicum, quibus *Leibnitius* & ego utimur; Saltem non generaliora: quia pro Quadratura & Εὐθυνσει Curvarum ac similibus, nullæ possunt dari Series ex hisce simplicibus terminis Algebraicis (unicam tantum indefinitam Quantitatem involventibus) constantes, quas non licet hac Methodo colligere.

Nam non possunt esse plures convergentes Series ad idem determinandum, quam sunt indefinitæ Quantitates, ex quarum Potestatibus Series conflentur: & ego quidem ex adhibita quacunque indefinita quantitate Seriem novi colligere; & idem credo *Leibnitio* in potestate esse.

Nam quamvis mea methodo liberum sit eligere, pro conflanda Serie, quantitatem quamlibet indefinitam, a qua quæsitum dependeat; & methodus,

thodus, quam ipse nobiscum communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum quibus opus commode deduci potest ad Fractiones; quæ per solam Divisionem evadant Series Infinitæ: tamen aliæ quæcunque indefinitæ Quantitates pro Seriebus conflandis adhiberi possunt, per methodum istam qua affectæ Æquationes resolvuntur, dummodo resolvantur in propriis terminis; hoc est, conficiendo Seriem ex solis terminis quos æquatio involvit.

Præterea, non video cur dicatur his Divisionibus & Extractionibus problemata resolvi *per Accidens*: Siquidem hæ operationes eodem modo se habeant ad hoc genus Algebræ, ac vulgares Operationes Arithmeticæ ad Algebram vulgo notam.

Quod autem ad simplicitatem methodi attinet; nolim Fractiones & Radicales absque prævia Reductione semper resolvi in Series Infinitas: Sed, ubi perplexæ quantitates occurrunt, tentandæ sunt omnimodæ Reductiones; sive fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo quantitates indefinitas; sive per methodum Transmutatoriam *Leibnitii*, aut alio quocunque modo qui occurrat. Et tunc Resolutio in Series per Divisionem & Extractionem opportune adhibebitur.

Hic autem præcipue nitendum est, ut Denominatores Fractionum, & Quantitates in Vinculo Radicum, reducantur ad quam paucissimas & minime compositas; & ad tales etiam quæ in Seriem abeunt citissime convergentem, etsi Radices neque convertantur in Fractiones neque deprimantur. Nam, per Regulam initio alterius Epistolæ, Extractio altissimarum Radicum æque simplex & facilis est ac Extractio Radicis Quadraticæ vel Divisio: & Series quæ per Divisionem eliciuntur solent minime omnium Convergere.

Hactenus de Seriebus unicam indefinitam Quantitatem involventibus locutus sum. Sed possunt ~~etiam, perfecta Methodo,~~ Series ex duabus vel pluribus assignatis Indefinitis Quantitatibus pro arbitrio confici. Quinetiam beneficio ejusdem methodi possunt Series ad omnes Figuras efformari, *Gregorianis* ad Circulum & Hyperbolam editis affines; hoc est, quarum ultimus terminus exhibebit quæsitam Aream. Sed calculum hic onerosiorem nolim lubens subire.

Possunt denique Series ex terminis compositis eadem Methodo constitui. Quemadmodum, si sit $\sqrt{aa - ax + \frac{x^3}{a}}$ Ordinatim-applicata Curvæ alicujus; pono $aa - ax = zz$, & ex Binomio $zz + \frac{x^3}{a}$ extracta Radice, prodibit $z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8aaz^3}$ &c. Cujus Seriei omnes termini quadrari possunt per Theorema jam ante descriptum. Sed hæc minoris facio, quod ubi Series simplices non sunt satis tractabiles, aliam nondum communicatam Methodum habeo, qua pro libitu acceditur ad quæsitum.

Ejus

Ejus fundamentum eſt commoda, expedita, generalis ſolutio hujus Problematis, *Curvam Geometricam deſcribere quæ per data quotcunque Puncta tranſibit.*

Docuit *Euclides* deſcriptionem Circuli per Tria data Puncta. Poteſt etiam Conica Sectio deſcribi per Quinque data Puncta: & Curva Trium Dimenſionum per Septem data Puncta; (adeo ut in poteſtate habeam deſcriptionem omnium Curvarum iſtius ordinis, quæ per Septem tantum puncta determinantur.) Hæc ſtatim Geometrice fiunt nullo Calculo interpoſito. Sed ſuperius Problema eſt alterius generis: & quamvis prima fronte intractabile videatur; tamen res aliter ſe habet. Eſt enim fere ex pulcherrimis quæ ſolvere deſiderem.

Seriei a D. *Leibnitio* pro Quadratura Conicarum Sectionum propoſitæ, affinia ſunt Theoremata quædam, quæ pro Comparatione Curvarum cum Conicis Sectionibus in Catalogum * dudum retuli.

Poſſum utique cum Sectionibus Conicis Geometrice comparare Curvas omnes (numero infinities infinitas,) quarum Ordinatim-applicatæ ſunt

$$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}} \ \text{\&c.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}} \ \text{\&c.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}} \quad \text{vel} \quad dz^{n-1}\times\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}} : \text{\&c.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}} \ \text{\&c.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{n-1}\times\sqrt{e+fz^{n}}}{g+hz^{n}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}\times\sqrt{e+fz^{n}}}{g+hz^{n}} \ \text{\&c.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{n-1}}{\overline{g+hz^{n}}\times\sqrt{e+fz^{n}}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}}{\overline{g+hz^{n}}\times\sqrt{e+fz^{n}}} \ \text{\&c.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{d}{z}\sqrt{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^{n}}} \quad \text{vel} \quad dz^{n-1}\times\sqrt{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^{n}}} \ \text{\&c.}$$

Hic d, e, f, g ſignificant quaſvis datas Quantitates cum ſuis Signis $+$ & $-$ affectas; z Axem vel Baſem Curvæ; & n, $2n$, $\frac{1}{2}n-1$, $\frac{3}{2}n-1$, $n-1$, $2n-1$ Indices Poteſtatum vel Dignitatum z, ſive ſint Affirmativi vel Negativi, ſive Integri vel Fracti; & ſingula bina Theoremata ſunt duo primi termini Seriei in infinitum progredientis. In Tertio & Quarto,

* Ex his patet Propoſitiones *Newtoni* de Quadratura Curvarum diu ante annum 1676 inventas fuiſſe.

Quarto, $4eg$ debet esse non majus quam ff, nisi e & g sint contrarii Signi. In cæteris nulla est limitatio. Horum aliqua (nempe, Secundum, Tertium, Quartum, Quintum, & Decimum-tertium) ex Areis duarum Conicarum Sectionum conjunctis constant. Alia quædam (ut Nonum, Decimum, & Duodecimum) sunt aliter satis Composita. Et omnia quidem in continuatione Progressionum cito evadunt compositissima; adeo ut vix per Transmutationem figurarum, quibus *Jacobus Gregorius* & alii usi sunt, absque ulteriori fundamento inveniri posse putem.

Ego quidem haud quicquam generale in his obtinere potui, antequam abstraherem a contemplatione Figurarum, & rem totam ad simplicem considerationem solarum Ordinatim-applicatarum reducerem. Sed, cum hæc, & hisce generaliora, sint in potestate; non dubitabitur, credo, de Binomialibus longe facilioribus quæ in his continentur, & prodeunt ponendo literam aliquam e vel f vel $g = 0$; & $n = 1$ vel 2; etsi Series, in quas ista resolvantur, non posuerim in Epistola priori, nedum forte computaverim; intentus, non in omnia particularia enumeranda, sed in illustrandam Methodum per unam & alteram in singulis rerum generibus instantiam, quæ ad ostendendam ejus generalitatem sufficere videbatur.

Cæterum hæc Theoremata dant Series plusquam uno modo. Nam primum si ponatur $f = 0$ & $n = 1$, evadit $\frac{d}{e+gzz}$; unde prodit Series nobis communicata. Sed si ponatur $2eg = ff$, & $n = 1$, inde tandem obtinemus hanc Seriem * $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ &c. pro longitudine Quadrantalis Arcus, cujus Chorda est Unitas: vel, quod perinde est, hanc $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255}$ &c. pro longitudine dimidii ejus. Et has forte, quia æque simplices sunt ac alteræ, & magis convergunt, non repudiabitis.

Sed ego rem aliter æstimo. Illud enim melius quod utilius est, & Problema minori labore solvit. Sic, quamvis hæc æquatio $x^3 - x = 1$ appareat simplicior hacce $yy - 2y\sqrt{[illegible] - \sqrt{20}} = \sqrt{20}$; tamen in confesso est posteriorem revera simpliciorem esse, propterea quod Radicem ejus y Geometra facilius eruit.

Et ob hanc rationem Series pro obtinendis Arcubus Circuli, vel (quod eodem recidit) pro obtinendis Sectoribus Conicarum Sectionum, pro optimis habeo quæ componuntur ex potestatibus Sinuum.

Nam siquis vellet per simplex computum hujus Seriei $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. colligere longitudinem Quadrantis ad Viginti figurarum loca

X decimalia,

* D. Vicecomes *Brounker* Hyperbolam per hanc Seriem $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \frac{1}{7\times 8}$ + &c. id est per hanc $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} +$ &c. (conjunctis binis terminis) primus omnium quadravit. *Mercator* hanc Quadraturam aliter demonstravit. *Gregorius* communicavit hanc Seriem pro Circulo $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. & *Newtonus* hanc $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} +$ &c.

decimalia, opus esset 5 000 000 000 terminis Seriei circiter; ad quorum Calculum Milleni Anni requirerentur. Et res tardius obtineretur per Tangentem 45 Graduum. Sed, adhibito Sinu recto 45 Graduum, Quinquaginta-quinque vel Sexaginta termini hujus Seriei $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \overline{1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{160} + \frac{1}{7}}$ &c. sufficerent: quorum computatio Tribus, ut opinor, vel Quatuor Diebus absolvi posset.

Et tamen hic non est optimus modus computandi totam Peripheriam. Nam Series ex sinu recto 30 graduum, vel sinu verso 60 graduum conflata, multo citius dabit Arcum suum; cujus sextuplum vel duodecuplum est tota Peripheria. Neque majori labore eruitur area totius Circuli ex segmento cujus Sagitta est quadrans diametri. Ejus Computi specimen, siquidem ad manus est, visum fuit apponere; & una adjungere Aream Hyperbolæ quæ eodem calculo prodit.

Posito Axe transverso $= 1$, & sinu verso seu segmenti Sagitta $= x$; erit Semi-segmentum $\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{matrix}\right\} = x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x \pm \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72}$ &c. Hæc autem Series sic in infinitum producitur, sit $2x^{\frac{1}{2}} = a$. $\frac{ax}{2} = b$. $\frac{bx}{4} = c$. $\frac{3cx}{6} = d$. $\frac{5dx}{8} = e$. $\frac{7ex}{10} = f$. &c. Et erit Semi-segmentum $\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{matrix}\right\} = \frac{a}{3} \pm \frac{b}{5} - \frac{c}{7} \pm \frac{d}{9} - \frac{e}{11} \pm \frac{f}{13}$ &c. Eorumque semi-summa $\frac{a}{3} - \frac{c}{7} - \frac{e}{11} -$ &c. & semi-differentia $\frac{b}{5} + \frac{d}{9} + \frac{f}{13} +$ &c. His ita præparatis, suppono $x = \frac{1}{4}$, quadrantem nempe Axis; & prodit a $(= \frac{2}{4}) = 0.25$; $b\,(= \frac{ax}{2} = \frac{0.25}{1 \times 8}) = 0.03125$: $c\,(= \frac{bx}{4} = \frac{0.03125}{2 \times 8}) = 0.001953125$: $d\,(= \frac{3cx}{6} = \frac{0.001953125}{8}) = 0.000244140625$. Et sic procedo usque dum venero ad terminum depressissimum, qui potest ingredi opus. Deinde hos terminos per 3, 5, 7, 9, 11, &c. respective divisos dispono in duas Tabulas: Ambiguos cum primo in unam; & Negativos in aliam; & Addo ut hic vides,

0.0833333333333333	0.0002790178571429
62500000000000	34679066051
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	0.0002825719389575
1	
0.0896109885646618	

Tunc

Tunc a priori summa aufero posteriorem, & restat 0.0893284166257043 Area Semi-segmenti Hyperbolici. Addo etiam eas summas, & aggregatum aufero a primo termino duplicato 0.1666666666666666, & restat 0.0767731061630473 Area Semi-segmenti Circularis. Huic addo Triangulum istud quo completur in Sectorem, hoc est $\frac{1}{32}\sqrt{3}$, seu 0.0541265877365274, & habeo Sectorem 60 graduum, 0.1308996938995747, cujus sextuplum 0.7853981633974482 est Area totius Circuli: Quæ divisa per $\frac{1}{4}$ sive quadrantem Diametri, dat totam Peripheriam 3.1415926535897928. Si alias artes adhibuissem, potui per eundem numerum terminorum Seriei pervenisse ad multo plura loca figuratum, puta Viginti quinque aut amplius: Sed animus fuit hic ostendere, quid per simplex Seriei computum præstari posset. Quod sane haud difficile est, cum in omni opere multiplicatores ac divisores magna ex parte non majores quam 11, & nunquam majores quam 41 adhibere opus sit.

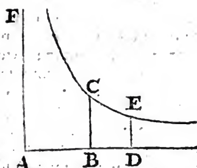
Per Seriem *Leibnitii* etiam, si ultimo loco dimidium termini adjiciatur, & alia quædam similia artificia adhibeantur, potest computum produci ad multas figuras. Ut & ponendo summam terminorum $1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{31}+\frac{1}{33}$ &c. esse ad totam Seriem $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+$ &c. ut $1+\sqrt{2}$ ad 2. Sed optimus ejus usus videtur esse, quando vel conjungitur cum duabus aliis persimilibus & citissime convergentibus Seriebus; vel sola adhibetur ad computandum arcum 30 graduum, posita Tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim Series illa evadit $1-\frac{1}{3\times3}+\frac{1}{5\times9}-\frac{1}{7\times27}+\frac{1}{9\times81}$ &c. quæ cito convergit. Vel, si conjunges cum aliis Seriebus, pone circuli Diametrum $=1$, & $a=\frac{1}{2}$; & area totius circuli erit summa harum trium Serierum $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}-\frac{a^7}{7}+\frac{a^9}{9}-\frac{a^{11}}{11}+$ &c. $\frac{aa}{1}+\frac{a^5}{3}-\frac{a^8}{5}-\frac{a^{11}}{7}+\frac{a^{14}}{9}+\frac{a^{17}}{11}$ &c. $\frac{a^4}{1}-\frac{a^{10}}{3}+\frac{a^{16}}{5}-\frac{a^{22}}{7}+\frac{a^{28}}{9}$ &c.

Hic consideravimus Series quatenus adhibentur ad computandum totum Circulum. Sed quando computandæ sunt partes ejus, tunc quælibet Series habet proprium usum, & in suo genere optima est. Si datur Tangens satis parva vel satis magna, non recurrendum erit ad Sinum aliquem ut inde computetur Arcus, neque vice versa. Series dato congruens est æquatio pro solvendo proprio Problemate.

Credo Cl. *Leibnitium*, dum posuit Seriem pro determinatione Co-sinus ex Arcu dato, vix animadvertisse Seriem meam pro determinatione Sinus Versi ex eodem Arcu; siquidem hæc idem sunt.

Neque observasse videtur morem meum generaliter usurpandi literas pro quantitatibus cum Signis suis $+$ & $-$ affectis, dum dividit hanc Seriem $\frac{z}{b}+\frac{zz}{2abb}+\frac{z^3}{6aab^3}+\frac{z^4}{24a^3b^4}+$ &c. Nam cum Area Hyperbolica

lica BE, hic significata per z, sit affirmativa vel negativa, prout jaceat ex una vel altera parte Ordinatim-applicatæ BC; si Area illa in numeris data sit l, & l substituatur in Serie pro z, orietur vel $\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} + \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c. vel $-\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} - \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c; prout l sit affirmativa vel negativa. Hoc est, posito $a = 1 = b$, & l logarithmo Hyperbolico; numerus ei correspondens erit $1 + \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} + \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ &c. si l sit affirmativus; & $1 - \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ &c. si l sit negativus. Hoc modo fugio multiplicationem Theorematum, quæ alias in nimiam molem crescerent. Nam v. g. illud unicum Theorema, quod supra posui pro Quadratura Curvarum, resolvendum esset in 32 Theoremata, si pro Signorum varietate multiplicaretur.



Præterea, quæ habet Vir Clarissimus de Inventione Numeri Unitate majoris per datum Logarithmum Hyperbolicum, ope Seriei $\frac{l}{1} - \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} - \frac{l^4}{1\times2\times3\times4} +$ &c. potius quam ope Seriei $\frac{l}{1} + \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} + \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. nondum percipio. Nam si unus terminus adjiciatur amplius ad Seriem posteriorem quam ad priorem, posterior magis appropinquabit. Et certe minor est labor computare unam vel duas primas figuras adjecti hujus termini, quam dividere Unitatem per numerum prodeuntem ex Logarithmo Hyperbolico ad multa figurarum loca extensum, ut inde habeatur numerus quæsitus Unitate major. Utraque igitur Series (si duas dicere fas sit) officio suo fungatur. Potest tamen $\frac{l}{1} + \frac{l^3}{1\times2\times3} + \frac{l^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c. Series, ex dimidia parte terminorum constans, optime adhiberi; siquidem hæc dabit semi-differentiam duorum numerorum, ex qua & rectangulo dato uterque datur. Sic & ex Serie $1 + \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. datur semi-summa numerorum; indeque etiam Numeri. Unde prodit relatio Serierum inter se, qua ex una data dabitur altera.

Theorema de inventione Arcus ex dato Co sinu, ponendo Radium 1, Co-sinum c, & Arcum $\sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$, minus appropinquat quam prima fronte videtur. Posito quidem sinu verso v, error erit $\frac{v^3}{90} + \frac{v^4}{194} +$ &c. Potest fieri ut $120 - 27v$ ad $120 - 17v$, ita Chorda $(\sqrt{2v})$ ad Arcum; & error erit tantum $\frac{61v^3\sqrt{2v}}{44800}$ circiter; qui semper minor est quam $5\frac{1}{4}$ minuta

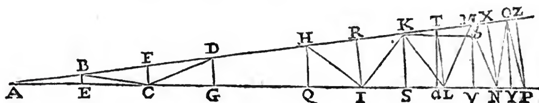
minuta ſecunda, dum arcus non ſit major quam 45 grad. Et ſingulis etiam biſectionibus diminuitur 128 vicibus.

Series $\frac{a^3}{1\times2\times3} - \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$ &c. applicari poſſet ad computationem tabulæ Segmentorum, ut obſervat Vir Clariſſimus. Sed res optime abſolvitur per Canonem Sinuum. Utpote, cognita Quadrantis Area, per continuam Additionem nonæ partis ejus habebis Sectores ad ſingulos Decem Gradus in Semicirculo: deinde per continuam Additionem decimæ partis hujus, habebis Sectores ad Gradus; & ſic ad decimas partes Graduum & ultra procedi poteſt. Tunc, radio exiſtente 1, ab unoquoque Sectore & ejus complemento ad 180 gradus, aufer dimidium communis Sinus Recti, & relinquentur Segmenta in Tabulam referenda. Cæterum quamvis Series hic non proſint, in aliis tamen locum obtinent. Et quoniam hoc ad earum uſum ſpectat, non gravabor in aliquibus attingere.

Conſtructionem Logarithmorum non aliunde peti debere credetis forte, ex hoc ſimplici proceſſu qui ab iſtis pendet. Per methodum ſupra traditam quærantur Logarithmi Hyperbolici numerorum 10, 0.98, 0.99, 1.01, 1.02: id quod ſit ſpatio unius & alterius horæ. Dein diviſis Logarithmis quatuor poſteriorum per Logarithmum numeri 10, & addito Indice 2, prodibunt veri Logarithmi numerorum 98, 99, 100, 101, 102, in Tabulam referendi. Hi per dena intervalla interpolandi ſunt, & exibunt Logarithmi omnium numerorum inter 980 & 1020: & omnibus inter 980 & 1000 iterum per dena intervalla interpolatis, habebitur Tabula eatenus conſtructa. Tunc ex his colligendi erunt Logarithmi omnium Primorum Numerorum & eorum multiplicium, minorum quam 100: ad quod nihil requiritur præter Additionem & Subtractionem. Siquidem ſit $\sqrt[10]{\frac{9984\times1020}{9945}} = 2$. $\sqrt[4]{\frac{8\times9963}{984}} = 3$. $\frac{10}{2} = 5$. $\sqrt{\frac{98}{2}} = 7$. $\frac{99}{9} = 11$. $\frac{1001}{7\times11} = 13$. $\frac{102}{6} = 17$. $\frac{988}{4\times13} = 19$. $\frac{9936}{16\times27} = 23$. $\frac{986}{2\times17} = 29$. $\frac{992}{32} = 31$. $\frac{999}{27} = 37$. $\frac{984}{24} = 41$. $\frac{989}{23} = 43$. $\frac{987}{21} = 47$. $\frac{9911}{11\times17} = 53$. $\frac{9971}{13\times13} = 59$. $\frac{9882}{2\times81} = 61$. $\frac{9849}{3\times49} = 67$. $\frac{994}{14} = 71$. $\frac{9928}{8\times17} = 73$. $\frac{9954}{7\times18} = 79$. $\frac{996}{12} = 83$. $\frac{9968}{7\times16} = 89$. $\frac{9894}{6\times17} = 97$. Et habitis ſic Logarithmis omnium numerorum minorum quam 100, reſtat tantum hos etiam ſemel atque iterum per dena intervalla interpolare.

Conſtructionis Tabulæ Sinuum, a qua pendet tota res Trigonometrica, fundamentum optimum eſt continua Additio dati Anguli ad ſeipſum vel ad alium datum. Utpote in Angulo Addendo BAE; inſcribantur HI, IK, KL, LM, MN, NO, OP, &c. æquales radio AB: & ad oppoſita la-

tera demittantur perpendiculares BE, HQ, IR, KS, LT, MV, NX, OY, &c. Et Angulorum HIQ, IKH, KLI, LMK, &c. differentiæ erunt Angulus A; Sinus HQ, IR, KS, &c; & Co-ſinus IQ, KR, LS, &c. Detur jam aliquis eorum LMK, & cæteri ſic eruentur. Ad SV & MV demitte perpendicula Ta & Kb; & (propter ſimilia Triangula ABE, TLa, KMb, ALT, AMV, &c.) erit AB . BE : : TL . La $(=\frac{SL-LV}{2})$: : KT $(=\frac{1}{2}KM)$. $\frac{1}{2}Mb$ $(=\frac{MV-KS}{2})$. Et AB . AE : : KT . Sa $(=\frac{SL+LV}{2})$: : TL . Ta $(=\frac{KS+MV}{2})$. Unde dantur Sinus & Co-ſinus KS, MV, SL, LV.



Et ſimul patet ratio continuandi progreſſiones. Nempe AB . 2AE : : LV . TM+MX : : MX . VN+NY &c. : : MV . TL+XN : : XN . MV+OY &c. Vel AB . 2BE : : LV . XN — TL : : MV . TM — MX : : MX . OY — MV : : XN . VN — NY &c. Et retro AB . 2AE : : LS . KT + RK &c. Pone ergo AB = 1, & fac BE × TL = La. AE × KT = Sa. Sa — La = LV. $\overline{2AE \times LV}$ — TM = MX &c. Sed nodus eſt inventio Sinus & Co-ſinus Anguli A. Et hic ſubveniunt Series noſtræ. Utpote cognita ex ſuperioribus Quadrantalis Arcus longitudine 1.57079 &c; & ſimul Quadrato ejus 2.4694 &c; divide Quadratum hoc per Quadratum numeri exprimentis rationem 90 Graduum ad Angulum A : &, Quoto dicto z, tres vel quatuor termini hujus Seriei $1-\frac{z}{2}+\frac{zz}{24}-\frac{z^3}{720}+\frac{z^4}{40320}$ &c. dabunt Co-ſinum iſtius Anguli A. Sic primo quæri poteſt Angulus 5 Graduum, & inde Tabula computari ad Quinos Gradus; ac deinde interpolari ad Gradus vel dimidios gradus, per eandem Methodum. Nam non convenit progredi per nimios ſaltus. Duæ tertiæ partes Tabulæ ſic computatæ, dant reliquam tertiam partem, per Additionem vel Subtractionem, more noto. Siquidem poſito KT Co-ſinu 60 Graduum; ſit AE = SV, & BE = Mb. Tunc ad decimas & centeſimas partes Graduum pergendum eſt per aliam Methodum; ſubſtitutis tamen prius Logarithmis Sinuum inventorum, ſi ejus generis Tabula deſideretur.

Ad computum Tabularum Aſtronomicarum *Kepleri*; poſui fundamentum aliquod in altera Epiſtola. Ejus Seriei tres primi termini & aliquando duo ſufficiunt. Sed ad diverſas partes Ellipſeos diverſæ ejuſmodi Series aptari debent. Vel potius tales Series computandæ ſunt, quæ ex data

data Area Sectoris Elliptici BGE, immediate exhibeant aream Sectoris Circuli, cujus Angulus est BEG, Radius CB. Et habitis hisce, computum earum ad duos, tres, aut forte quatuor terminos, beneficio Logarithmorum, haud gravius erit quam solita Resolutio tot Triangulorum in aliis Hypothesibus: Imo forte minus grave, si Series prius debite concinnentur; siquidem unus Logarithmus e Tabula petitus determinet omnes istos terminos, addendo ipsum & ejus multiplices ad Logarithmos datarum Coefficientium in promptu habitos.

Quæ de hoc genere Tabularum dicuntur, ad alias transferri possunt, ubi ratiocinia Geometrica locum non obtinent. Sufficit autem per has Series computare triginta, vel viginti, aut forte pauciores terminos Tabulæ in debitis distantiis; siquidem termini intermedii facile interseruntur per Methodum quandam, quam in usum Calculatorum fere hic descripsissem. Sed pergo ad alia.

Quæ Cl. *Leibnitius* a me desiderat explicanda, ex parte supra descripsi. Quod vero attinet ad Inventionem terminorum p, q, r, in Extractione Radicis Affectæ: primum p sic eruo. Descripto Angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; & inde normales erigo distribuentes angulare spatium in æqualia parallelogramma vel quadrata,

Fig. 1.

B

x^4	x^4y	x^4yy	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6
x^3	x^3y	x^3yy	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6
x^2	x^2y	x^2yy	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	x^2y^6
x	xy	xyy	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6
o	y	yy	y^3	y^4	y^5	y^6

A C

Fig. 2.

B D A E C

quæ concipio denominata esse a dimensionibus duarum indefinitarum specierum, puta x & y, regulariter ascendentium a termino A; prout vides in Fig. 1. inscriptas. Ubi y denotat Radicem extrahendam; & x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus potestatibus Series conficienda est. Deinde, cum Æquatio aliqua proponitur, parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio nota aliqua: & Regulâ ad duo vel forte plura ex insignitis parallelogrammis applicatâ (quorum unum sit humillimum in columna sinistra juxta AB, & alia ad Regulam dextorsum sita, cæteraque omnia non contingentia Regulam supra eam jaceant) Seligo terminos Æquationis per parallelogramma contingentia Regulam designatos, & inde quæro quantitatem Quotienti addendam.

Sic ad extrahendam Radicem y, ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota

aliqua

aliqua *; ut vides Fig. 2. Dein applico regulam DE ad inferiorem e locis signatis in sinistra columna; eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio, donec alium similiter vel forte plura e reliquis signatis locis cœperit attingere. Videoque loca sic attacta esse x^3, $xxyy$ & y^6. E terminis itaque $y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (& insuper si placet reductis ad $v^6 - 7vv + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$,) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino Quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est.

† Sic Æquatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, quam resolvebam in priori Epistola, dat $-2a^3 + aay + y^3 = 0$, & inde $y = a$ proxime: Cum itaque a sit primus terminus valoris y, pono p pro cæteris omnibus in infinitum, & substituo $a + p = y$. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ; sed ex iis, credo, D. *Leibnitius* se proprio marte extricabit.) Subsequentes vero termini q, r, s, &c. eodem modo ex æquationibus secundis, tertiis, cæterisque eruuntur, quo primus p è prima, sed cura leviori; quia cæteri valores y solent prodire dividendo terminum involventem infimam potestatem indefinitæ quantitatis x per Coefficientem Radicis p, q, r aut s.

Intellexti credo ex superioribus, Regressionem ab Areis Curvarum ad Lineas Rectas, fieri per hanc Extractionem Radicis Affectæ. Sed duo alii sunt modi quibus idem perficio.

Eorum unus affinis est Computationibus quibus colligebam approximationes sub finem alterius Epistolæ, & intelligi potest per hoc Exemplum. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ $z = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. Et partibus ejus multiplicatis in se, emerget $z^2 = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5$ &c. $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$ &c. $z^4 = x^4 + 2x^5$ &c. $z^5 = x^5$ &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}z^2$, & restat $z - \frac{1}{2}z^2 = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{13}{60}x^5$ &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, & fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$ &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & restat $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5$ &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 = x$ quamproxime; sive $x = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.

Eodem modo Series de una Indefinita Quantitate in aliam transferri possunt. Quemadmodum si posito r Radio Circuli, x Sinu recto arcus z, & $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} +$ &c. Longitudine arcus istius; atque hanc Seriem a Sinu recto ad Tangentem vellem transferre: Quæro longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr - xx}}$, & reduco in infinitam Seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8r^4} +$ &c. Vocetur hæc quantitas t. Colligo potestates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr}$ &c. $t^5 = x^5 +$ &c. Aufero autem t de z, & restat $z - t = -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^5}{10}$ &c.

† Hanc Resolutionem vid. pag. 11.

Addo

Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 +$ &c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & reſtat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = 0$ quamproxime. Quare eſt $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 -$ &c. Sed ſiquis in uſus Trigonometricos me juſſiſſet exhibere expreſſionem Arcus per Tangentem; eam non hoc circuitu, ſed directa methodo quæſiviſſem.

Per hoc genus Computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus conſtantes; & Radices affectarum Æquationum magna ex parte extrahuntur. Sed ad hunc poſteriorem uſum adhibeo potius Methodum in altera Epiſtola deſcriptam tanquam generaliorem, & (Regulis pro Eliſione ſuperfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam.

Pro Regreſſione vero ab Areis ad Lineas Rectas, & ſimilibus, poſſunt hujuſmodi Theoremata adhiberi.

Theorema 1. Sit $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c. Et viciſſim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 + \frac{2bb - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7}z^4 + \frac{3aacc - 21abbc + 6aabd + 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5 +$ &c. Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ, $z = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ &c. Et ſubſtitutis in Regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e; viciſſim exurgit, $y = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 +$ &c.

Theorema 2. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 +$ &c. Et viciſſim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^4}z^3 + \frac{3bb - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - aad - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55abbc + 10aabd + 5aacc - a^3e}{a^{13}}z^9 +$ &c. Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Arcum Circuli, $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$ &c. Et ſubſtitutis in Regula 1 pro a, $\frac{1}{6rr}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d &c; orietur $y = z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} +$ &c.

Alterum modum regrediendi ab Areis ad Lineas rectas celare ſtatui.

Ubi dixi, omnia pene Problemata ſolubilia exiſtere; volui de iis præſertim intelligi circa quæ Mathematici ſe hactenus occuparunt, vel ſaltem in quibus Ratiocinia Mathematica locum aliquem obtinere poſſunt. Nam alia ſane adeo perplexis conditionibus implicata excogitare liceat, ut non ſatis comprehendere valeamus; & multo minus tantarum computationum onus ſuſtinere quod iſta requirerent.

Attamen, ne nimium dixiſſe videar, inverſa de Tangentibus Problemata ſunt in poteſtate, aliaque illis difficiliora. Ad quæ ſolvenda uſus ſum duplici Methodo; una concinniori, altera generaliori. Utramque viſum

eſt impræſentia literis tranſpoſitis conſignare, ne propter alios idem obtinentes, inſtitutum in aliquibus mutare cogerer. * *5accdæ10effh12i4l3m10n6oqqr7s11t10v3x: 11ab3cdd10eæg10ill4m7n6o3p3q6r5ſ11t7vx, 3acæ4egh6i4l4m5n8oq4r3ſ6t4v, aaddæeeeeeiiimmnnooprrrsssssttuu.*

Inverſum hoc Problema de Tangentibus, quando Tangens inter punctum contactus & axem Figuræ eſt datæ longitudinis, non indiget his Methodis. Eſt tamen Curva illa Mechanica, cujus determinatio pendet ab Area Hyperbolæ.

Ejuſdem generis eſt etiam Problema, quando pars Axis inter Tangentem & Ordinatim-applicatam datur longitudine.

Sed hos caſus vix numeraverim inter ludos naturæ. Nam quando in Triangulo Rectangulo, quod ab illa Axis parte & Tangente ac Ordinatim-applicata conſtituitur, relatio duorum quorumlibet laterum per Æquationem quamlibet definitur, Problema ſolvi poteſt abſque mea Methodo Generali: Sed ubi pars Axis ad punctum aliquod poſitione datum terminata ingreditur Vinculum; tunc res aliter ſe habere ſolet.

Communicatio Reſolutionis Affectarum Æquationum per Methodum *Leibnitii*, pergrata erit; juxta & explicatio quomodo ſe gerat, ubi indices poteſtatum ſunt Fractiones; ut in hac Æquatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{12}} = 0$; aut Surdæ Quantitates, ut in hac $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}|^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = y$: ubi $\sqrt{2}$ & $\sqrt{7}$ non deſignant Coefficientes ipſius x, ſed indices Poteſtatum ſeu Dignitatum ejus; & $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ indicem Dignitatis Binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, mea methodo patet; aliter deſcripſiſſem.

Sed meta tandem prolixæ huic Epiſtolæ ponenda eſt. Literæ ſane Excellentiſſimi *Leibnitii* valde dignæ erant, quibus fuſius hoc Reſponſum darem. Et volui hac vice copioſior eſſe, quia credidi amœniora tua negotia ſeveriori hoc ſcribendi genere non debere a me crebro interpellari.

Tui Studioſiſſimus

Iſ. Newton.

* Id eſt, *Una Methodus conſiſtit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus: altera tantum in aſſumptione Seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera commode derivari poſſunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis reſultantis, ad eruendos terminos aſſumptæ Seriei.* Analyſin per Fluentes & earum Momenta in æquationibus tam infinitis quam finitis, *Newtonus* in his Epiſtolis ad Regulas quatuor reduxit. Per primam extrahitur Fluens ex Binomiis, adeoque ex æquationibus quibuſcunque non affectis in Serie infinita, & Momentum fluentis ſimul prodit, quo evaneſcente Series in Æquationem finitam redit. Per ſecundam extrahitur Fluens ex æquationibus affectis Fluxionem non involventibus. Per tertiam extrahitur Fluens ex æquationibus affectis Fluxionem ſimul involventibus. Per quartam eruitur Fluens ex conditionibus Problematis. Regulæ duæ primæ in principio Epiſtolæ ſuperioris, duæ ultimæ in fine hujus ponuntur. Harum Regularum *Newtonum* eſſe inventorem primum nemo dubitat.

Excerpta

Exerpta ex Epistola D. Collins *ad D.* Newtonum, Londini 5 Martii 1677 *data. Integra autem extat impressa in Tomo tertio Operum D.* Wallisii *pag.* 646, *&c.*

Clarissime Vir,

Aderat hic D. *Leibnitius* per unam Septimanam, in mense *Octobris*; in reditu suo ad Ducem *Hanoveræ*; cujus literis revocatus erat, in ordine ad quandam Promotionem.

Dixit *Leibnitius*, se posse & velle consilia impertire, pro obtinendis Seriebus, absque Speciosa Extractione Radicum Æquationum affectarum; modo quis velit laborem illum obire.

Et consequenter ad hoc, (postquam ego D. *Bakerum* ipsi nominaveram,) literis ejus ad D. *Oldenburgium*, datis *Amstelodami*, $\frac{18}{28}$ *Novemb.* 1676, hæc scribit.

'D. *Collinio* hæc quæso communica. Dixit ille mihi D. *Bakerum*, doctum admodum & industrium apud vos Analyticum, utilibus consiliis exequendis parem esse. Elegi ego unum præ reliquis utile & facile. Nimirum, Methodus Tangentium a *Slusio* publicata nondum rei fastigium tenet. Potest aliquid amplius præstari in eo genere, quod maximi foret usus ad omnis generis Problemata: Etiam ad meam (sine extractionibus) Æquationum ad Series reductionem. Nimirum, Posset brevis quædam calculari circa Tangentes Tabula, eousque continuanda, donec progressio Tabulæ apparet, ut eam scilicet quisque, quousque libuerit, sine calculo continuare possit.

'*Amstelodami* cum *Huddenio* locutus sum; cui negotia civilia tempus omne eripiunt. Est enim ex numero 12 urbis Consulum, qui subinde imperium obtinent: Nuper Consul Regens erat; nunc Thesaurarii munus exercet. Præclara admodum in ejus Schedis superesse certum est. Methodus Tangentium a *Slusio* publicata dudum illi fuit nota. Amplior ejus Methodus est, quam quæ a *Slusio* fuit publicata. Sed & Quadratura Hyperbolæ *Mercatoris* ipsi jam Anno 1662 innotuit. Hactenus *Leibnitius*.

P. S. Exemplar Epistolæ tuæ (quatuor schedarum) nondum est ad D. *Leibnitium* missum: Sed, intra Septimanam, est quidam hinc profecturus *Hanoveram*, qui tum illud, tum libros quosdam laturus est.

Epistola

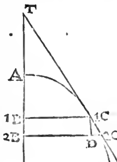
Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgium, 21 Junii 1677, *data cum D.* Newtono *communicanda. Cujus extat exemplar manu D.* Collins *descriptum.*

Amplissime Domine,

ACcepi Literas tuas diu expectatas, cum inclusis *Newtonianis* sane pulcherrimis; quas plus semel legam cum cura & meditatione; quibus certe non minus dignæ sunt quam indigent. Nunc pauca quæ festinante oculo obeunti incidêre e vestigio annotabo.

Egregie placet, quod descripsit qua via in nonnulla sua elegantia sane Theoremata inciderit. Et quæ de *Wallisianis* Interpolationibus habet, vel ideo placent, quia hac ratione obtinetur harum Interpolationum Demonstratio, cum res ea antea (quod sciam) sola Inductione niteretur; tametsi pars eorum per Tangentes sit demonstrata.

Clarissimi *Slusii* Methodum Tangentium nondum esse absolutam Celeberrimo *Newtono* assentior. Et jam a multo tempore* rem Tangentium longe generalius tractavi; scilicet per differentias Ordinatarum. Nempe T 1B (intervallum Tangentis ab Ordinata in Axe sumptum) est ad 1B 1C Ordinatam, ut 1CD (differentia duarum Abscissarum A 1B, A 2B,) ad D 2C (differentiam duarum Ordinatarum 1B 1C, 2B 2C.) Nec refert quem angulum faciunt Ordinatæ ad Axem. Unde patet, nihil aliud esse invenire Tangentes, quam invenire Differentias Ordinatarum, positis differentiis Abscissarum (seu 1B 2B = 1CD) si placet æqualibus. Hinc nominando † in posterum, dy differentiam duarum proximarum y (nempe A 1B & A 2B;) & dx seu D 2C differentiam duarum proximarum x (prioris 1B 1C, posterioris 2B 2C;) patet dy^2 esse $2ydy$; & dy^3 esse $3y^2dy$, &c. & ita porro. Nam sint duæ proximæ sibi (id est, differentiam habentes infinite parvam) scilicet A 1B $= y$; & A 2B $= y + dy$.



Quoniam

* Idem fecit D. *Barrow* in ejus Lect. 10, Anno 1669 impressa, idque calculo consimili.

† Cœpit igitur D. *Leibnitius* hoc ipso tempore Methodum differentialem cum amicis scripto communicare; lectis prius que *Newtonus* de hac Methodo in duabus Epistolis scripserat, Lectis fortean & aliis *Newtonianis* sub finem Anni 1676, ubi domum per *Londinum* redibat.

Quoniam ponimus dy^2 eſſe differentiam quadratorum ab his duabus rectis, Æquatio erit $dy^2 = y^2 + 2ydy + dydy - y^2$. Seu, omiſſis $y^2 - y^2$ quæ ſe deſtruunt, item omiſſo quadrato quantitatis infinite parvæ (ob rationes ex Methodo de Maximis & Minimis notas,) erit $dy^2 = 2ydy$. * Idemque eſt de cæteris potentiis. Hinc etiam haberi poſſunt differentiæ quantitatum ex diverſis indefinitis in ſe invicem ductis factarum: ut dyx erit $= ydx + xdy$; & $dy^2x = 2xydy + y^2dx$. Hinc ſi æquatio $a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2$ &c. $= 0$; ſtatim habetur Tangens Curvæ ad quam eſt iſta Æquatio. Nam ponendo $AB = y$, & $A2B = y + dy$ (ſcilicet, quia $1B\,2B$ ſeu $1CD = dy$;) Itemque ponendo $1B\,1C = x$, & $2B\,2C = x + dx$ (ſcilicet, quia $2CD = dx$,) Et quia eadem æquatio exprimit quoque relationem inter $A2B$ & $2B\,2C$, quæ eam exprimebat inter $A1B$ & $1B\,1C$; † Tunc in æquatione illa pro y & x ſubſtituendo $y + dy$, & $x + dx$, fiet

$$\left.\begin{array}{l} a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 \text{ \&c.} \\ \hline \quad by\!\!\!\!\quad b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}x + dy\mathrm{d}x + 2ey\mathrm{d}y + 2fx\mathrm{d}x + 2gxy\mathrm{d}y + 2hxy\mathrm{d}x \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad + dx\mathrm{d}y \qquad\qquad\qquad\qquad + gy^2\mathrm{d}x + hx^2\mathrm{d}y \text{ \&c.} \\ \hline \qquad\qquad + d\mathrm{d}x\mathrm{d}y + e\mathrm{d}y\mathrm{d}y + f\mathrm{d}x\mathrm{d}x + gx\mathrm{d}y\mathrm{d}y + hy\mathrm{d}x\mathrm{d}x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2ey\mathrm{d}y\mathrm{d}x + 2hx\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + g\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y + h\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}x \end{array}\right\} = 0.$$

d eſt quantitas communi more.
d eſt nota Differentiæ.

Ubi, abjectis illis quæ ſunt ſupra primam lineam, quippe nihilo æqualibus per æquationem præcedentem; & abjectis illis quæ ſunt infra ſecundam, quia in illis duæ infinite parvæ in ſe invicem ducuntur; hinc reſtabit tantum æquatio hæc $b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}x + dy\mathrm{d}x$ &c. $= 0$, quicquid ſcilicet re-
$+ dx\mathrm{d}y$
peritur inter lineam primam & ſecundam. Et, mutata æquatione in rationem ſeu analogiam, fiet $-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy \text{ \&c.}}{b + dx + 2ey + 2gxy + hx^2 \text{ \&c.}}$ Id eſt (quia $-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ſeu $\frac{-1B\,2B, \text{ ſeu } -1CD}{D\,2C} = -\frac{T\,1B}{1B\,1C}$) erit $\frac{c + dy \text{ \&c.}}{b + dx \text{ \&c.}} = -\frac{T\,1B}{1B\,1C}$. Quod coincidit cum Regula *Sluſiana*, oſtenditque eam ſtatim occurrere hanc Methodum intelligenti.

Sed Methodus ipſa (priore) noſtra longe eſt amplior. Non tantum enim exhiberi poteſt, cum plures ſunt literæ indeterminatæ quam y & x

* Id eſt, Si ſecundus terminus Binomii ſit differentia primi termini, ſecundus terminus potentiæ Binomii erit differentia potentiæ. Hoc eſt fundamentum Methodi differentialis a *Leibnitio* jam poſitum. Et hoc idem fundamentum Methodi ſuæ *Newtonus* Anno 1669 poſuerat in Analyſi ſupra impreſſa, pag. 19. Perſimilibus calculis *Newtonus* Momenta, & *Leibnitius* Differentias colligerunt, & diſcrepant ſolum in rerum nominibus.

† Calculus etiam in his Exemplis allatus a calculo *Newtoniano* in ſolis notarum formulis differt, ſed notis minus aptis obſcurior redditur.

(quod sæpe fit maximo cum fructu ;) Sed & tunc utilis est cum interveniunt irrationales, quippe quæ eam nullo morantur modo, neque ullo modo necesse est irrationales tolli, quod in Methodo *Slusii* necesse est, & calculi difficultatem in immensum auget.

Quod ut appareat, tantum utile erit in irrationalitatibus simplicioribus rem explanare. Et primum fit in simplicissimis generaliter. Si sit aliqua potentia aut radix x^z ; erit $dx^z = zx^{z-1}dx$.

Si z sit $\frac{1}{2}$, seu si x^z sit $\surd x$, erit dx^z, seu hoc loco $d\surd x = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ seu $\frac{dx}{2\surd x}$; ut notum aut facile demonstrabile.

Sit jam Binomium, ut $\surd^3:\overline{a+by+cy^2\,\&c.}$ quæritur $d\surd^3:\overline{a+by+cy^2\,\&c.}$ seu dx^z, posito $\frac{1}{3} = z$, & $a + by + cy^2$ &c. $= x$. Est autem $dx = bdy + 2cydy$ &c. Ergo dx^z seu $\frac{dx}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{bdy + 2cydy\,\&c.}{3 \times \overline{a+by+cy^2\,\&c.}|^{\frac{2}{3}}}$ Eadem Methodus adhiberi potest etsi Radices in Radicibus implicentur. Hinc si detur æquatio valde intricata, ut $a + bx\surd\overline{y^2 + b\surd^3:\overline{1+y}} + bx^2y\surd\overline{y^2+y\surd\overline{1-y}} = 0$. ad aliquam Curvam cujus Abscissa sit y (AB,) Ordinata x (BC,) tunc Æquatio proveniens utilis ad inveniendam Tangentem TC, statim sine calculo scribi poterit ; & erit hæc $bdx\surd\overline{y^2+b\surd^3:\overline{1+y}} + \frac{bx}{2\surd\overline{y^2+b\surd^3:\overline{1+y}}}$

$$\times \overline{2ydy + \frac{bdy}{3\times\overline{1+y}^{\frac{2}{3}}}} + \overline{bx^2dy + 2bxydx} \times \surd\overline{y^2+y\surd\overline{1-y}} + \frac{bx^2y}{2\surd\overline{y^2+y\surd\overline{1-y}}}$$

$$\times \overline{2ydy + dy\surd\overline{1-y} - \frac{ydy}{2\surd\overline{1-y}}} = 0.$$

Seu, mutando Quotientem hanc inventam in Analogiam, erit $-dy$ ad dx, seu T 1B ad 1B 1C, ut omnes provenientis æquationis termini per dx multiplicati, ad omnes ejusdem terminos per dy multiplicatos.

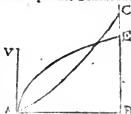
Ubi sane mirum & maxime commodum evenit, quod dy & dx semper extant extra vinculum irrationale. Methodo autem *Slusiana* omnes ordine irrationales tollendas esse nemo non videt.

Arbitror, quæ celare voluit *Newtonus* de Tangentibus durendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento * quadraturas quoque reddi faciliores, me in sententia hac confirmat, nimirum semper figuræ illæ sunt quadrabiles quæ sunt ad Æquationem Differentialem, Æqua-

* Characteres Methodi *Newtoni Leibnitius* hic enumerat, & gaudet se in Methodum incidisse cui Characteres hi omnes competunt. Fatetur etiam *Newtonum* intellexisse facilem quadraturam Figurarum quæ sunt ad Æquationem Differentialem. Vel doceat Methodum aliam in rerum natura extare cui Characteres hi omnes competunt, vel desinat negare se in Methodum *Newtoni* incidisse.

Æquationem Differentialem voco talem qua valor ipsius dx exprimitur, quæque ex alia derivata est qua valor ipsius x exprimebatur. Exempli gratia; sit AB $=y$. EB $=x$ ponatur $\frac{b+cy+dy^2+ey^3 \text{ \&c.}}{2\sqrt{1+by+\frac{1}{2}cy^2+\frac{1}{3}dy^3+\frac{1}{4}ey^4 \text{ \&c.}}}$

Quæritur Quadratura figuræ ABEA (quamquam forte sæpe tale Trilineum non sit proditurum quale hoc schemate depinximus.) Describatur alia Curva AC, talis ut BC [quæ] sit $\sqrt{1+by+\frac{1}{2}cy^2+\frac{1}{3}dy^3+\frac{1}{4}ey^4 \text{ \&c.}}$ [ipsius Ordinatam] significet; & Rectangulum sub recta AV representante Unitatem constructionis, & sub Ordinata nova BC, æquabitur figuræ ABEA. Ejusmodi Theoremata condi possunt infinita: Imo pleraque sub generalissimis quibusdam complecti. Licet nihil refert sive Series hæ producantur, sive ubilibet finiantur. Unde patet hanc unicam Regulam pro infinitis figuris quadrandis inservire, diversæ plane naturæ ab iis quæ hactenus quadrari solebant.



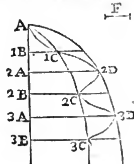
Pulcherrimæ sunt illæ Series *Newtonianæ* quæ ex Infinitis in Finitas degenerant; qualis illa est quam exhibet pro Extractione Radicum Binomii, aut ejus Quadratura. Quodsi in ipsius generali illa Æquationis Affectæ indefinitæ Extractione, cum sit $x=ay+by^2+cy^3$ &c. et y sit $\frac{z}{a}-\frac{bz^2}{a^3}$ &c. vel $y=\frac{z}{a}-\frac{bz^2}{a^3}$ &c: idem præstari posset; ut scilicet, inter extrahendum radices ex æquationibus aut binomiis, invenire liceret Radices rationales finitas quando eæ insunt, vel etiam irrationales: Tunc dicerem Methodum Serierum infinitarum ad summam perfectionem esse perductam.

Opus esset tamen præterea, discerni posse varias æquationis ejusmodi Radices: Item necesse esset, ope Serierum, discerni æquationes Possibiles ab Impossibilibus. Quodsi hæc nobis obtinuerit Vir in his studiis maximus, atque effecerit scilicet ut possimus Seriem Infinitam convertere in Finitam quando id fieri potest, aut saltem agnoscere ex quanam finita sit deducta: Tunc in methodo Serierum Infinitarum, quæ Divisione & Extractione inveniuntur, vix quicquam amplius optandum restabit. Hæc, si quisquam mortalium, certe *Newtonus* præstare poterit. Eadem credo opera efficietur, ut, ex multis Seriebus Infinitis, possimus deligere maxime naturales; quales haud dubie illæ erunt, quæ ita erunt comparatæ, ut, cum fieri potest, atque opus elt, degenerent in Finitas. Atque ita egregie apparebit Methodum Extractionum per Series Infinitas minime Indirectam, sed maxime Naturalem esse.

Problema

Problema est perelegans cujus meminit, Curvam describere quæ per data quæcunque transeat Puncta. *Huddenius* mihi *Amstelodami* dixit, posse se Curvam describere Analyticam, seu certa Æquatione uniformi constantem, quæ Faciei Hominis cujusdam noti lineamenta designet.

Cæterum quærendum est, an hoc *Newtonus* intelligat de Punctis Infinitis; ut si sit Axis A 1B 2A 2B 3A &c. in infinitum productus; & duæ curvæ datæ infinitæ Analyticæ, una A 1C 2C 3C &c, altera A 2D 3D &c; si ponamus A 1B, 1B 2A, 2A 2B, 2B 3A, &c. inter se & datæ cuidam quantitati F æquales; Quæritur an dari possit Curva Analytica, seu Æquationis capax, quæ in infinitum producta transeat (alternis) per puncta 1C, 2D, 2C, 3D, 3C, &c. *Fermatius* alicubi scribit, se Methodum habere per quam Curva inveniri possit, cujus proprietas specifica data non pertineat ad unum Punctum, ut vulgo fit, cum Ordinatæ referuntur ad partes Axis; sed ad duo quælibet simul, vel etiam ad tria quælibet simul, &c.



† Quæ de variis Seriebus suis & nostris examinandis atque inter se comparandis dicit Clarissimus *Newtonus*; in ea me immergere non audeo, antequam in gratiam cum Analysi rediero: nam harum rerum vestigia in animo meo prope nunc obliterata sunt. Agnosco interim pulcherrima & utilissima ab eo annotari. Elegantissima & minime expectata est via qua seriem meam $\frac{1}{1}t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ &c. deduxit ex sua.

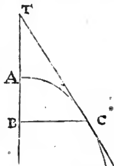
Quod ait, Problemata methodi Tangentium Inversæ, esse in potestate; hoc arbitror ab eo intelligi per Series scilicet Infinitas: * Sed a me ita desiderantur, ut Curvæ exhibeantur Geometrice quatenus id fieri potest, suppositis (minimum) Quadraturis. Exempli causa. Cycloidem deprehendit *Hugenius* sui ipsius Evolutione describi: Difficile autem fuisset, credo, solvere hoc Problema, Invenire Curvam quæ sui ipsius Evolutione describitur. Neque refert quod Curvæ Descriptio quadraturam Circuli supponit:

* Dixerat *Newtonus*, Analysin beneficio æquationum infinitarum ad omnia pene Problemata sese extendere (pag. 55, lin. penult.) Respondit *Leibnitius*; Multa esse *Problemata* usque adeo mira & implexa ut neque ab æquationibus pendeant neque a quadraturis, qualia sunt Problemata Methodi Tangentium inversæ &c. pag. 65, lin. 15. Rescripsit *Newtonus*, *inversa de Tangentibus Problemata esse in potestate, aliaque illis difficiliora; ad quæ solvenda se usum esse duplici Methodo* &c. pag. 85. *Leibnitius* vero ne quid a *Newtono* jam didicisse videretur, regerit solutionem a *Newtono intelligi per Series infinitas; sed a se ita desiderari ut Curvæ exhibeantur Geometricæ quatenus id fieri potest*. In priore Epistola negaverat Analysin *Newtonianam* per Æquationes Infinitas ad hæc Problemata extendi. Jam negat se negasse, & verbis prioribus nubem obducit, quasi inversum illud Problema suo sensu non solveretur, nisi Curvæ exhibeantur Geometricæ quatenus id fieri potest, & Curva quæ sui ipsius Evolutione describitur inveniri possit per eandem solutionem.

† Vide pag. 42, lin. 7, 8; pag. 45, lin. 22 & seq.

ſupponit: Et hoc Problema etiam ex eorum eſt numero, quæ voco Methodi Tangentium Inverſæ. Ita inter Methodos Tangentium Inverſas generales eſt, Invenire Curvam Analyticam cujus Longitudines ſint Areis datæ Figuræ, Curvâ Analytica comprehenſæ, proportionales. Contrarium enim dudum poſſumus. Quod Problema arbitror non eſſe Inſolubile, & videtur non contemnendum: Facilius enim eſt Lineam quam Spatium organice metiri. Et, reducta Spatiorum dimenſione ad dimenſionem Linearum, ſolis Filis in rectum extenſis Mechanica fieri poterit Conſtructio; & Spatia poterunt in data ratione ſecari inſtar Linearum rectarum.

Cum ait *Newtonus*, inveſtigationem Curvæ, quando Tangens, vel Intervallum Tangentis & Ordinatæ in Axe ſumptum, eſt recta conſtans, non indigere his Methodis: innuit credo ſe intelligere Methodum Tangentium Inverſam generalem in poteſtate eſſe per Methodos Serierum appropinquativas; in hoc vero caſu ſpeciali * non opus eſſe Seriebus. Ego vero Methodum quærebam quæ accurate Curvam quæſitam exhibeat, ſaltem ex ſuppoſitis Quadraturis; & cujus ope ejus Æquationem, ſi quam habet, aut aliam primariam proprietatem poſſumus invenire.



Quod ait, Problemata in quibus datur relatio inter duo latera Trianguli TBC ſemper poſſe ſolvi. Id verum eſt; at ex † meis quoque artibus fluit; ac ſæpe, ne Quadraturis quidem accitis, ſimplici Analytica Æquatione præſtari poteſt. Ut, ſi BC poſita x, ſit $TB = bx + cx^2 + dx^3$, quæritur Qualiſnam ſit hæc Curva quæ hanc Tangentium habeat proprietatem: id eſt, Quænam ſit Æquatio relationem exprimens inter AB ſeu y, & BC ſeu x. Aio eam fore $y = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}dx^3$. Si fuiſſet $TB = a + bx + cx^2$, opus fuiſſet Quadratura Hyperbolæ ad inveniendam Curvam quæſitam. Generaliter autem, quomodocunque datur relatio inter duo ex lateribus Trianguli,

* Hoc non dixit *Newtonus*, ſed perſpicue dixit Problema in hoc caſu non indigere Methodis duabus generalibus, quas literis tranſpoſitis celaverat, vide pag. 86.

† Per artes ſuas intelligit Methodum differentialem ut patet ex calculis quos ſubjungit. Ubi Epiſtolam priorem ſcribebat, Problema de Curva invenienda, in qua intervallum Tangentis & Ordinatæ in Axe ſumptum ſit recta conſtans, vocabat Ludum naturæ, & ejuſmodi Problemata mira & implexa ab æquationibus pendere noluit. Reſpondebat *Newtonus* hoc Problema non eſſe ludum naturæ, ſed ubi datur relatio quævis inter ordinatam, & tangentem, & intervallum utriuſque in Axe ſumptum, ſemper poſſe ſolvi, idque abſque ſua Methodo generali; nempe per Fluxionum methodum ſimplicem & Quadraturam Curvarum. Jam reſcribit *Leibnitius*, *Id verum eſſe, at ex ejus quoque artibus fluere*, (id eſt ejuſmodi Problemata ab æquationibus ſuis pendere) & triangulum TBC, *ob crebros uſus, Characteriſticum vocat*, quaſi hæc ipſi dudum innotuiſſent. Hujuſmodi problemata ab æquationibus non pendere anno ſuperiore ſcripſit: jam fluunt horum ſolutiones ex ejus artibus, ac ſæpe ne quadraturis quidem accitis; ſimplici analytica æquatione (differentiali ſcilicet) peraguntur.

(quod

(quod ego *Characteristicum*, ob crebros usus, vocare soleo) semper, suppositis Quadraturis Figurarum Analyticarum, haberi potest Curva quæsita. Quod tamen nescio an præter *Newtonum* præstiturus sit quisquam.

Mea Methodo, res unius lineolæ calculo peragitur ac demonstratur. Sed & rem infinitis casibus præstare possum, tametsi ipsa y seu AB ingrediatur in ipsius TB expressionem. Ut, si sit TB $= bx + cx^2 + dx^3 - y$, fiet Æquatio Curvæ $yx = bx + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{3}dx^2$. [*Forte legendum*, TB $= b + cx + dx^2 - y$, *fiet æquatio Curvæ*, $yx = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}dx^3$.] Itaque si habeatur valor ipsius TA, ex BC haberi poterit Curva.

Quod vero ait Cl. *Newtonus* * non æque rem procedere si detur relatio ipsius TB ad partem axis, seu ad AB vel y, ad hoc respondeo; mihi æque facile esse invenire Curvæ naturam vel æquationem, si detur relatio ipsius TB ad AB, quam si, ut ipse requirit, detur relatio ad BC. Generalem vero methodum Tangentium inversam nondum quod sciam habemus.

Sunt & alia Problematum genera quæ hactenus in potestate non habeo, quorum ecce exempla. Sint duæ æquationes $x^y + y^x = xy$, & $x^x + y^y = x + y$. Duæ sunt incognitæ x, y, duæque ad eas inveniendas æquationes; quæritur valor tam unius quam alterius literæ. Talia Problemata vel in numeris vel in lineis solvere difficillimum arbitror; si tamen de appropinquationibus agatur, puto posse iis satisfieri. Si quam huic difficultati Lucem afferre potest *Newtonus*, pro ea qua pollet ingenii vi, multum Analysim promovebit.

Analysis quoque *Diophantæa*, seu solutio Problematum in numeris rationalibus nondum perfectionem nacta est.

Hæc annotavi festinans atque inter legendum; ad reliqua majore otio opus est: Interea celeberrimum *Newtonum* quæso officiosissime a me saluta, & post actas maximas gratias eum roga, ut communicet continuationem harum Serierum; nempe posita $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ &c. ait fore $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3$ &c. vel $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5$ &c. Et si qua alia in promptu habet Theoremata nonnihil generalia; quoniam ad calculum contrahendum plurimum serviunt: quod si eorum originem sive demonstrationem addet, tanto magis obligabit. Velim etiam nosse an per Extractiones in Seriebus discernere possit æquationes possibiles ab impossibilibus; nam si generalis ejusmodi extractio procederet, sequeretur nullam æquationem fore impossibilem: item quomodo inveniat diversas

* Dixerat *Newtonus* quod ubi *relatio duorum quorumlibet laterum Trianguli definiretur per æquationem, Problema solvi potest absque generali ejus Methodo quam literis transpositis celaverat, sed ubi pars Axis vel Abscissæ ingreditur vinculum res aliter se habere solet*, id est, indiget ejus Methodo generali, præterquam in particularibus quibusdam. *Leibnitius* ad particularia illa alludens *sibi æque facile esse invenire Curvæ naturam vel æquationem in utroque casu.* Quibus verbis manifestum est solutionem generalem ei nondum innotuisse.

versas ejusmodi æquationis radices, ita ut ex pluribus radicibus eam possit invenire quam quærimus: item an tales habeat Series quarum ope extrahendo æquationis inveniuntur valores finiti, quando tales insunt æquatione: denique quid sentiat de resolutione æquationum quales paulo ante posui, ut $x^y + y^z = xy$ & $x^z + y^y = x + y$; ubi scilicet incognita ingreditur in exponentem.

Oblitus eram dicere pulchram mihi videri Cissoidis extensionem in rectam, quam *Newtonus* invenit, ex supposita Quadratura Hyperbolæ. Ego mihi videor eodem modo etiam metiri posse † curvam Hyperbolæ æquilateræ, sed nondum omnis; neque curvam Ellipseos quantum memini.

Antequam finiam adjiciam usum pulcherrimum Serierum, qui imprimis *Collinio* nostro non erit ingratus. Scis magnam esse difficultatem circa extrahendas radices ex binomiis Cubicis, quando eas ingreditur quantitas imaginaria, orta ex radice quadratica negativæ quantitatis; ut $\sqrt{3}: \overline{a + \sqrt{-bb}} = M + \sqrt{3}: \overline{a - \sqrt{-bb}} = N$: ubi utraque quantitas M & N est singulatim impossibilis, summa autem, ut alibi ostendi,* est quantitas possibilis & realis, æqualis cuidam quæsitæ z. Ut vero ea exematur, & ut extrahatur radix, nempe ut inveniatur $\frac{1}{2}z + e\sqrt{-bb} = \sqrt{3}: \overline{a + \sqrt{-bb}}$, & $\frac{1}{2}z - e\sqrt{-bb} = \sqrt{3}: \overline{a - \sqrt{-bb}}$ (unde fit $\sqrt{3}: \overline{a + \sqrt{-bb}} + \sqrt{3}: \overline{a - \sqrt{-bb}} = z$) non potest adhiberi Methodus *Schotenii* Geometriæ *Cartesianæ* subjecta, quia opus est ad eam ut valor ipsius $\sqrt{3}: \overline{a + \sqrt{-bb}}$ exhibeatur saltem approximando, quod notis Methodis impossibile est. Quis enim valorem ipsius $\sqrt{-bb}$ prope verum dabit? necesse est enim invenire $b\sqrt{-1}$; quis autem exprimat $\sqrt{-1}$ appropinquando? Scripsi olim *Collinio* me remedium invenisse, quod etiam ad omnes gradus superiores valeat: id ecce hic uno verbo. Ex Binomio $\sqrt{3}: \overline{a + \sqrt{-bb}}$ extraho radicem per Seriem Infinitam, sive per Theorema *Newtonianum*, sive etiam more meo priore, instituendo calculum secundum naturam cujusque gradus, cum scilicet nondum Theorema generale abstraxissem: quæ radix ponatur esse $l + m\sqrt{-bb} + n + p\sqrt{-bb}$ &c. Extrahatur jam & radix ex Binomio altero $\sqrt{3}: \overline{a - \sqrt{-bb}}$, fiet illa $+ l - m\sqrt{-bb} + n - p\sqrt{-bb}$ &c. ut facile demonstrari potest ex calculo: ergo ‡ addendo hæc duo extracta, destruentur imaginariæ quantitates, & fiet $z = 2l + 2n$ &c. quæ sunt ex Seriei portiones in quibus nulla reperitur imaginaria. Invento ergo valore ipsius z quantum satis est propinquo, quemadmodum *Schotenius* postulat, reliqua methodo *Schotениana*, perinde ac in aliis Binomiorum extrahendorum generibus, transigentur.

Junii 21. 1677.

† Rogatur D. *Leibnitius* ut hoc Theorema lucem tandem videat.
* Summa est quantitas triplex possibilis, ideoque non nisi tripliciter exhiberi potest.
‡ Examinanda est hæc Methodus.

 Epistola

Epistola D. Leibnitii *ad* D. Oldenburgum, 12 Julii 1677 *data, cum* D. Newtono *communicanda. Hujus extat exemplar manu* D. Collins *descriptum, & impressa est a* D. Wallisio *pag.* 652.

Amplissime Domine,

NUperas meas credo acceperis, nunc istas mature summitto, ne facilitate D. *Newtoni* abutamur. Rogaveram enim in prioribus, ut quædam suæ Epistolæ loca explicaret; nempe quomodo invenisset Theoremata, quod posito $z = ay + by^2 + cy^3$ &c. sit $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3$ &c. vel $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5$ &c. Nunc vero, relectis ejus literis, video id facile non tantum ex ejus extractionibus derivari, sed & altera illa methodo sub finem literarum ejus exposita inveniri, qua me quoque † aliquando usum in veteribus meis Schedis reperio; sed cum in exemplo, quod forte in manus meas sumseram, nihil prodiisset elegans, solita impatientiam eam porro adhibere neglexisse.

Difficultatem moveram in præcedentibus literis circa æquationes impossibiles, quarum radices possibiles videntur inveniri per Series Infinitas; necdum vero illa sublata est, & meretur res excuti diligentius: illud tamen video, si in æquatione data $z = ay + by^2 + cy^3$ &c. literæ z & y sint indeterminatæ, tunc æquationem semper esse possibilem; sed si z esset determinata, rursusque in ipsis a vel b &c. lateret æquatio, posset esse impossibilis, & tamen per Seriem generalem aliqua prodire videretur radix possibilis; cujus difficultatis solutionem, re diligenter expensa, reperiri posse arbitror: sed nunc in ista accuratius inquirere non licet. Meretur autem explicari tum quomodo ex Seriebus agnosci possit æquationes esse impossibiles (quanquam id alias satis facile inveniatur) tum quomodo dignoscantur diversæ radices.

Præter ea quæ in superiore Epistola notavi, scilicet Methodum Tangentium inversam & Geometricam (saltem suppositis Curvarum analyticarum quadraturis) & alia id genus, * deest nobis circa Quadraturas ut scire certo possimus, an non quadratura figuræ alicujus propositæ reducatur ad quadraturam Circuli aut Hyperbolæ: nam pleræque figuræ hactenus tracta-

tæ

† D. *Leibnitius* Series plures reciprocas ante biennium ab *Oldenburgo* acceperat, Methodum Serierum reciprocarum anno superiore *Newtonum* rogaverat, hoc anno acceptam ægre intellexerat, & intellectam se olim invenisse ex chartis suis antiquis mox didicit: Et quamvis Series pro Hyperbola & Circulo ante annos plures haberet, & hæc methodus ex arcu daret Sinum, ex Logarithmo daret numerum, & Serierum omnium exhiberet reciprocas; eandem tamen olim inventam neglexisse ut inutilem. Sic Methodum, quam diu desideraverat, rogaverat, acceperat & ægre intellexerat, vel primus vel saltem proprio marte scilicet invenit.

* Quod hic desideratur, *Newtonus* in Epistola sua novissima significavit se aliqua ex parte invenisse, & quod invenerat postea publicavit in Libro de Quadratura Curvarum.

tæ ope alterutrius quadrari potuerunt. Quod si demonstrari potest (ut arbitror) quasdam figuras non esse quadrabiles nec per Circulum nec Hyperbolam, restat ut alias quasdam figuras primarias altiores constituamus, ad quarum quadraturam reducantur cæteræ omnes, quando id fieri potest. Hoc quamdiu non fit hæremus, & sæpe per Seriem infinitam particularem quærimus, quod ad Circuli aut Hyperbolæ aut aliam notioris figuræ quadraturam reduci poterat. Crediderat *Gregorius* dimensionem Curvarum Hyperbolæ & Ellipseos non pendere a quadratura Circuli aut Hyperbolæ; ego vero reperi aliquam speciem Curvæ Hyperbolicæ quam ex data ipsius Hyperbolæ quadratura metiri possum: de cæteris nondum mihi liquet.

Hannoveræ 12 *Julii* 1677.

B*REVI postea, Autumno scilicet anni* 1677, *mors* Oldenburgi *huic literarum Commercio finem imposuit. Deinde anno* 1682 *Acta eruditorum* Lipsiæ *primum edita sunt, ejusque anni Mense* Februario *prodiit D.* Leibnitii Quadratura Arithmetica *Circuli scilicet & Hyperbolæ, quarum prior non differt a* Gregoriana *toties dicta, neque posterior ab ea Vicecomitis* Brounkeri, *ante quatuordecim annos, in* Philosophicis Transactionibus N°. 34 *pro mense* Aprilis 1668, *publicata. Non multo post, anno scilicet* 1684, *in iisdem Actis* Lipsicis *pro mense* Octobri, Calculi differentialis *Elementa primum edidit D.* Leibnitius *literis* G. G. L. *designatus. Anno autem* 1683 *ad finem vergente, D* Newtonus *Propositiones principales earum quæ in* Philosophiæ Principiis Mathematicis *habentur* Londinum *misit, eædemq; cum* Societate Regia *mox communicatæ sunt; annoque* 1686 *Liber ille ad Societatem missus est ut imprimeretur, proximoque anno lucem vidit: & Exemplar ejus D.* Nicolao Fatio *datum est ut ad* Leibnitium *mitteretur. Deinde anno* 1688 *Epitome ejus in* Actis Lipsicis *impressa est: qua lecta D.* Leibnitius *Epistolam de lineis Opticis, Schediasma de resistentia Medii & motu Projectilium gravium in Medio resistente, & Tentamen de Motuum Cœlestium causis composuit, & in* Actis Lipsicis *ineunte anno* 1689 *imprimi curavit, quasi* * *ipse quoque præcipuas* Newtoni *de his rebus Propositiones invenisset, idque diversa methodo qua vias novas Geometricas aperuisset; & librum* Newtoni *tamen nondum vidisset.*

* Hac licentia concessa authores quilibet inventis suis facile privari possunt. Viderat *Leibnitius* Epitomen Libri in *Actis Lipsiens.* Per commercium Epistolicum, quod cum Viris doctis passim habebat, cognoscere potuit Propositiones in libro illo contentas. Si librum non viderat, videre tamen debuisset antequam suas de iisdem rebus in itinere scriptas compositiones publicaret. Dicunt aliqui falsas esse Tentaminis Propositiones 11, 12 & 15, & D. *Leibnitium* ab his per calculum suum derivasse Propositiones 19 & 20 ejusdem Tentaminis. Talis autem calculus ad Propositiones prius inventas aptari quidem potuit, non autem inventorem constituere.

Anno autem 1695 *Opera Mathematica Celeberrimi* Wallisii *duobus Tomis* Oxonii *prodiere : & in Actis Eruditorum anni insequentis Mense* Junio, *habetur libri Epitome ; in qua sequentia leguntur, pag.* 157 *& seq.*

NEwtonianis *etiam seriebus jam in Anglicana editione expositis, adjicit quædam quæ* David Gregorius *Scotus Professor* Oxoniensis, *&* Archibaldus Pitcarnius *Medicinæ* Lugduni Batavorum *Professor, non abludentia attulerunt. Addit cap 95 Algebræ pag. 389 apud exteros (ut verba ejus sonant) etiam* Leibnitium *&* Tschürnhausium *nonnihil ejusmodi præstitisse, & apud* Britannos Jacobum Gregorium *&* Nicolaum Mercatorem, *sed quæ sint ut plurimum nonnisi casus particulares intra ambitum generalem regularum* Newtoni. *Calculo quoque Differentiali* Leibnitii *affinem esse methodum Fluxionum* Newtoni *in Principiis Naturæ Mathematicis primum editam) tum utraque esse antiquiorem* Barrovii ; *& omnes* Wallisianæ *Arithmeticæ Infinitorum superstrui, quæ* Cavallerii *Geometriam promovit, ut hic* Archimedeam. *Exhibet etiam Methodum quandam* Josephi Raphson *pro Infinitis Seriebus, libello* Londini 1690 *edito sub titulo Analyseos Æquationum universalis comprehensam. Cæterum ipse* Newtonus *non minus candore quam præclaris in rem Mathematicam meritis insignis.* * *publice & privatim agnovit,* Leibnitium *tum cum (interveniente celeberrimo Viro* Henrico Oldenburgo *Bremensi,* Societatis Regiæ Anglicanæ *tunc Secretario) inter ipsos (ejusdem jam tum Societatis Socios) commercium intercederet, id est jam fere ante annos viginti & amplius, Calculum suum Differentialem, Seriesque Infinitas & pro iis quoque Methodos generales habuisse ; quod* Wallisius, *in præfatione Operum factæ inter eos communicationis mentionem faciens, præteriit, quoniam de eo fortasse non satis ipsi constabat. Cæterum Differentiarum consideratio* Leibnitiana, *cujus mentionem facit* Wallisius *(ne quis scilicet, ut ipse ait, causaretur de Calculo Differentiali nihil ab ipso dictum fuisse) meditationes aperuit, quæ ali-*

unde

* Methodum Differentialem *Moutoni* D. *Leibnitius* habuit anno 1673, & suam esse voluit : Methodum aliam Differentialem nondum habuit. Series postea habuit, sed quas anno 1675 ab *Oldenburgo* accepit, ab aliis prius accipere potuisset. Methodum generalem perveniendi ad ejusmodi Series anno proximo ab *Oldenburgo* petiit, a *Newtono* accepit, antea non habuit. Methodum extrahendi Radices in speciebus a *Newtono* simul accepit, qua Methodus ejus per Transmutationem figurarum nondum generalis, in Methodum quandam generalem evasit, sed inutilem : Per Extractiones solas res citius peragitur. Anno 1677 Methodum novam Differentialem habuit, ac tantam Methodi hujus antiquitatem Editores jactant, majorem non asserunt. Methodum generalem vel Serierum vel Differentialem, *Leibnitium* vel primum vel proprio marte invenisse *Newtonus* nondum agnovit publice.

unde non æque nascebantur. Est enim Differentia Analyticum quiddam & calculi capax, & quod rei caput est, Summæ reciprocum. Eaque demum ratione factum est, ut calculus Analyticus non minus in Geometria altiore, quam Cartesius *a suo calculo excluserat, quam in ordinaria ab ipso tractata procedat. Et quemadmodum* Apollonius *& alii Veteres habebant quidem proprietates ordinatarum pro lineis Conicis & aliis, ex quibus formatæ sunt postea æquationes a* Cartesio ; *ita similiter lineæ, quas ipse* Cartesius, *quippe calculo suo intractabiles, a Geometria excluserat,* Leibnitiana *primum methodo æquationibus finitis sunt expressæ & sub leges Analyseos redactæ ; qua ratione omnes earum proprietates Analytico jam calculo investigari possunt, prorsus ut in ordinariis. Et cum antea per viam figurarum & imaginationis etiam præstantissimi Geometræ faciliora tantum assequi in his potuerint, nunc ope hujus calculi non tantum priora illa primo velut obtutu patent, quæ tunc merito admirationi erant, sed & multo magis abstrusa deteguntur ad quæ imaginatio non pertingit, in quo consistit potissimus calculi Analytici usus. Cæterum ipsum celeberrimum* Wallisium, *quo est candore, non dubitamus etiam Nostratium meditationibus, si sufficientem earum habuisset notitiam, locum ampliorem in suo Opere daturum fuisse. Sed ipse queritur, ultima Algebræ suæ paginâ, hæc nostra Eruditorum Acta, in quibus bona earum pars continetur, minus sibi fuisse visa : unde neque illa satis sibi cognita ait, quæ de Geometria Incomparabilium, vel Analysi Infinitorum, a* Leibnitio *data fuere, quæ libenter alioqui in suo quoque opere exhibiturus fuerit. Cæterum hac occasione & de* Nicolao Mercatore, *(quem* Wallisius *velut inter suos recensere videtur) notare volumus,* Germanum *fuisse, & ex* Holsatia *oriundum, etsi in* Angliam *habitatum concesserit ; eumque primum fuisse, quantum constet, qui Quadraturam publice dederit per Seriem infinitam, tametsi tunc quoque* Newtonus *in eadem ipso inscio incidisset, eaque multo longius produxisset.*

Excerpta ex Epistola D. J. Wallisii *ad D.* Leibnitium, Oxonii 1°. *Decemb. 1696 data, qua respondetur ad ea quæ ex Actis Eruditorum modo descripsimus.*

DUM hæc scripturus eram ; ostendit mihi non-nemo, hesterno die, *Acta Lipsica*, pro Mense *Junii* præsentis Anni 1696. Quorum Eruditus Editor dignatus est inibi amplam meorum Operum Mathematicorum (*Oxonii* editorum) mentionem facere. Quo nomine me ipsi obstrictum sentio, & gratias habeo.

Sed conqueri videtur (saltem subinsinuare) quod, quum *Newtoni* Methodos fusius exposuerim ; de *Leibnitianis* parcius dixerim. At nolim ego Te (quem magni æstimo) a me quoquo modo læsum iri. Sed gratulor

tuler potius, Te, in tanta nobilitate positum, ad res nostras Mathematicas descendere voluisse. Et tantum abest ut velim ego Tibi quocunque modo iniquus esse, ut siqua ferat occasio, demerere malim.

Dum addit Eruditus Editor, Illas me forte præteriisse quod de illis mihi non satis constiterit; id omnino verum est.

Dicam utique quod res est (neque enim fateri pudet:) Tuarum ego rerum nihil (quod memini) vidi quicquam, præter hæc duo. Quorum alterum, illud est quod inter *Londinensium Collectiones Philosophicas* habetur (sed absque Demonstratione) ex *Actis Lipsicis* descriptum; De *Quadrato Diametri ad Aream Circuli*; ut 1 ad $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ &c. in infinitum. Quod ego meis inserui (ut a * Te factum) ad Algebræ meæ Prop. 95.

Alterum est illud de *Testudine Quadrabili*; cujus ego (ut de Tuo) mentionem facio in Algebræ meæ postremo folio. Præter hæc duo, si plura noverim, non reticuissem.

Tuam *Geometriam Incomparabilium* vel *Analysin Infinitorum*, (quam ibidem a te memoratam dixi,) ego nondum vidi; nec ejus quicquam vel de nomine ante inaudiveram, quam prout ibidem ad calcem Algebræ dictum est.

Neque *Calculi Differentialis* vel Nomen audivisse me memini, nisi postquam utrumque Volumen absolverant operæ, eratque Præfationis (præfigendæ) postremum folium sub Prelo, ejusque typos jam posuerant Typothetæ. Quippe tum me monuit amicus quidam (harum rerum gnarus) qui peregre fuerat, tum talem methodum in *Belgio* prædicari, tum illam cum *Newtoni* methodo Fluxionum quasi coincidere. Quod fecit ut (transmotis typis jam positis) id monitum interseruerim.

Sed & ante monueram, Algebræ Prop. 95. pag. 389. (quod solum potui) *Leibnitium* & *Tschürnhausium* talia meditatos; sed quæ ego non videram. (Necdum vidi.) Et sicubi forte viderim literas *G. G. L.* nesciebam quem illæ Virum indicabant.

Extant, credo, plura in *Actis Lipsicis*; sed quæ ego non vidi: Uti nec tu, credo, vidisti *Brounkeri Quadraturam Hyperbolæ*, quæ extat in Transactionibus *Londinensibus*. Mihique condonari potest, hac ætate, (qui annum Octogesimum superavi) si non omnia sciscitarer.

Noveram quidem jamdudum (& indicavi) de rebus hujusmodi nonnulla te meditatum esse; tibique cum *Newtono* (mediante *Oldenburgo*) intercessisse Literas quasdam tuas: Sed, quas ego non vidi, nec scio quales fuerint: eratque *Oldenburgus* diu mortuus, ut non potuerim ab illo sciscitari.

* Ignoravit *Wallisius Gregorium* hanc Seriem anno 1671 cum *Collinio*, *Oldenburgum* anno 1675 cum *Leibnitio* communicasse; & præterea *Leibnitium* in *Anglia* fuisse anno 1673. *Collinius* enim, *Leibnitio* tum non ignotus, ab anno 1670 Series a *Newtono* & *Gregorio* acceptas rogatus non rogatus liberrime nec sine jactantia communicavit, ut ex superioribus patet.

tari. Rogabam quidem (per literas) *Newtonum* nostrum, ut si eas penes se haberet, earum mihi copiam faceret literarum; sed retulit ille, se non habere. (Et quidem periisse credo flammis inopinato correptas, cum pluribus *Newtoni* scriptis meliori luce dignis: & nisi per me stetisset, periissent etiam *Newtoni* literæ.) Eoque animo rogabam, ut tuas illas cum *Newtoni* literis junctim ederem. Idque etiamnum, si ferat occasio, facturus forte sum, modo mihi dignaberis earum copiam facere.*

Quod *Henricus Oldenburgus* fuerit *Bremensis*; & *Nicolaus Mercator Holsatus*; (quod suggerit Eruditus Editor) omnino verum esse credo; saltem Anglos non fuisse satis novi, (eosque propterea *Germaniæ* vestræ non invideo) Adeoque non *Nostrates* dixi, sed *Apud Nos*: nec tamen ideo minus eos aut amavi, aut æstimavi. Nam mihi perinde est qua quis gente sit *(Tros Tyriusve foret, nullo discrimine)* modo sit vir bonus & bene meritus. Sed *apud Nos* diu vixerant; & quicquid hac in re fecerint, *apud Nos* factum est.

Quæ fusius exposui, ut sentias quam Tibi non iniquus fuerim, aut parum candidus.

* Eas tandem obtinuit D. *Wallisius* e schediasmatis *Collinii*.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad* Wallisium *scripta*, $\frac{19}{29}$ *Martii, ineuntis Anni* 1697.

—— Quoniam videris nonnulla, in Actis dicta, ita accepisse, quasi animi parum erga *Germanos* æqui accuseris, & quasi vicissim tua recensendo extenuentur: Putavi non ingratum Tibi fore, si Epistolam Dominis Editoribus Actorum scriberem (cujus hic Exemplum addo;) qua (si ipsis videretur) Actis iisdem inserta, satisfieri tibi, scrupulis illis sublatis, possit. [*Habetur in Actis Lipsicis pro mense Junio* 1697.]

Ego qui Te magni facio, & publice professus sum quantum meo judicio Tibi debeat altior Geometria, æquissimum puto viris præclare, non de suo tantum seculo sed & posteritate, meritis debitas gratias rependi. Ut autem animi mei certior esse possis, ecce verbo tenus transcripta quæ ipse de Tuis meritis Geometricis dixi, *Actorum Lipsiensium Mense Junio* 1686, *pag.* 298.

" Paucis dicam, quid potissimum insignibus nostri seculi Mathematicis " in hoc Geometriæ genere mea sententia debeatur.

" Primum *Galilæus* & *Cavallerius* involutissimas *Cononis* & *Archimedis* " artes detegere cœperunt.

" Sed *Geometria Indivisibilium Cavallerii* Scientiæ renascentis non nisi " Infantia fuit. Majora subsidia attulerunt Triumviri celebres; *Fermatius*, inventa methodo de *Maximis & Minimis*: *Cartesius*, ostensa ratione

" Lineas Geometriæ communis (Tranſcendentes enim excluſit) exprimen-
" di per *Æquationes :* Et P. *Gregorius a S. Vincentio*, multis præclaris In-
" ventis. Quibus egregiam *Guldini* Regulam de *Motu Centri Gravitatis*
" addo.

" Sed & hi intra certos limites conſtitere ; quos tranſgreſſi ſunt *Huge-*
" *nius* & *Walliſius*, Geometria inclyti. Satis enim probabile eſt *Hugeniana*
" *Heuratio*, & *Walliſiana Nelio* & *Wrennio* (qui primi Curvis æquales Rectas
" demonſtravere) pulcherrimorum inventorum occaſionem dediſſe. Quod
" tamen meritiſſimæ laudi Inventionum nihil detrahit.

" Secuti ſunt hos *Jacobus Gregorius Scotus* & *Iſaacus Barrovius Anglus :*
" qui præclaris in hoc genere Theorematibus ſcientiam mirifice locuple-
" tarunt.

" Interea *Nicolaus Mercator Holſatus*, Mathematicus & ipſe præſtantiſſi-
" mus, * primus (quod ſciam) Quadraturam aliquam dedit per *Seriem In-*
" *finitam.*

" At idem inventum non ſuo tantum Marte aſſecutus eſt, ſed & uni-
" verſali quadam ratione abſolvit, profundiſſimi ingenii Geometra *Iſaacus*
" *Newtonus.* Qui, ſi ſua cogitata ederet, quæ illum adhuc premere in-
" telligo, haud dubie nobis novos aditus ad magna Scientiæ incrementa
" compendiaque aperiret.

Quibus deinde nonnihil de iis addo, † quæ mea opera acceſſere ; Præ-
ſertim dum novo Calculi genere effeci ut etiam Algebram tranſcendentia
Analyſi ſubjiciantur ; & Curvas, quas *Carteſius* a Geometria male exclu-
ſerat, ſuis quibuſdam ** Æquationibus explicare docui. Unde omnes
earum proprietates certo calculi filo deduci poſſunt. Exemplo *Cycloidis*,
cui Æquationem ibidem aſſigno, $y = \sqrt{2x - xx} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}$. Ubi
$\int$ ſignificat Summationem ; & d, Differentiationem ; x, Abſciſſam ex
Axe inde a Vertice ; & y, Ordinatam normalem.

De Te autem queri nunquam mihi in mentem venit ; quem facile ap-
paret noſtra, in *Actis Lipſienſibus* prodita, non ſatis vidiſſe.

Quæ inter *Oldenburgum* & me commutatæ ſunt Literæ, quibus aliqua
acceſſerant a D. *Newtono* excellentis ingenii Viro, variis meis itineribus
& negotiis ab hoc ſtudiorum genere plane diverſis, vel periere ut alia
multa

* *Mercator* quadraturam D. *Brounkeri* per diviſionem *Walliſianam* tantum demonſtra-
vit ut ſupra.

† *Leibnitius* recitando inventa nova Mathematica, prætermittit Methodum Fluxio-
num, quaſi Analyſis tota Infiniteſimalis ſola ſua opera acceſſerat.

** Annon *Newtonus* hujuſmodi æquationes prius invenit, qui docuit Fluentem ex
Æquatione Fluxionem involvente extrahere, & Curvas Mechanicas ad Æquationes
Numero Terminorum Infinitas reduxit, pergendo ab hujuſmodi æquationibus finitis?
Annon tota Fluxionum Methodus inverſa, ubi de Curvis agitur, pendeat ab hujuſ-
modi Æquationibus ad Curvas applicatis?

multa, vel jacent in mole chartarum aliquando excutienda digerendaque, ubi a necessariis occupationibus vacatio erit; quam mihi tam subito quam vellem promittere non possum.

Ex Epistola Wallisii *ad* D. Leibnitium, *Apr. 6. 1697.*

Vir Nobilissime Celeberrimeque,

Literas tuas humanissimas *Martii* $\frac{19}{29}$ *Hannoveræ* datas, accepi (& exosculatus sum) *Martii* 31 stilo nostro 1697; hoc est, *Apr.* 10. stilo novo. Mihique gratulor quod Nobilissimo Viro Ego Meaque non displicuerint. Veniam interim exorare debeo, si locorum distantia fecerit, ut eruditissima tua scripta & inventa minus ego sciverim aut intellexerim, quam vellem; & quidem, quis sit ille tuus *Calculus Differentialis* non satis mihi compertum sit; nisi quod mihi nuper nunciatum est, eum cum *Newtoni Doctrina Fluxionum* quasi coincidere.

Nec puder me meam hac in parte ignorantiam fateri, qui jam ab aliquot annis contentus fuerim (hac ætate) *lampadem tradere*; aliisque permittere, ut promoveant ea quæ (siqua) ego non infeliciter detexerim.

Quod Literas scripseris (in mei gratiam) ad Editores *Actorum Lipsicorum*, favori tuo debeo, & grates habeo.

Quis eorum ille sit, qui mea scripta recensuit in *Actis Lipsicis* pro mense *Junii* 1696, Ego quidem non scio; sed ei gratias habeo. Neque enim est cur ego ei succensere debeam, si non (primo intuitu) statim perspexerit omnia quæ penitius rimanti occurrissent, aut etiam sint occursura. Sufficit enim instituto suo, ut summa quæque carpat & magis obvia; Lectoribus permittendo, si penitiora desiderent, apud Authores indicatos quærere. Nolim autem existimes quod in gentem vestram minus æquo sim animo; nam secus est, &c.

Ubi dicitur, *Nicolaum Mercatorem primum esse qui Quadraturam aliquam dedit per Seriem Infinitam:* Vide annon mea talis sit, Ar. Infin. Pr. 191.

$\square = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times \&c.}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times \&c.}$ *Et Brounkeri* $\square = 1\frac{1}{2}\;\frac{9}{2}\;\frac{25}{2}\;\frac{49}{2}\;\frac{81}{2}$ &c.

Sed & omnes mearum tabellarum series, in Arithmetica Infinitorum, sunt *Series Infinitæ*; & earum plurimæ quales quæ Vobis dicuntur (novo nomine) Series *Transcendentales*.

Nolim utique ut Clarissimo Viro fraudi sit nova Compellatio. Nam quas ego vocaveram *Continuas Approximationes*, vocat *Jacobus Gregorius Series Convergentes*; & *Newtonus Series Infinitas*; sed res eadem est. Sic quod ego vocaveram *Centrum Percussionis*, vocat *Hugenius* (novo nomine) *Centrum Oscillationis*; sed eadem res est. Et *Fermatii Hyperbolæ Infinitæ* eædem sunt cum meis *Seriebus Reciprocis*. Et *Galilæi Cycloides*, *Mersenni*

 Trochoides,

Trochoides, mea *Cyclois*, & *Cusani* Curva (quocunque nomine dicatur) sunt res eadem. Sic Rectificata Curva *Nelii*, & Curva *Heuratii*, & Curva demum *Fermatii*, eadem est cum mea *Paraboloide Semi cubicali*. Et Gallorum *Socia Cycloidis* est ea Curva quæ (mihi) terminat Figuram *Sinuum rectorum*. Et, ni fallor (sic saltem mihi nunciatum est) *Newtoni Doctrina Fluxionum* res eadem est (vel quam simillima) quæ vobis dicitur *Calculus Differentialis*: Quod tamen neutri prajudicio esse debet.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad* Wallisium *scripta*, 28 Maii 1697.

METhodum *Fluxionum* profundissimi *Newtoni*, cognatam esse methodo meæ *Differentiali*, non tantum animadverti * postquam opus ejus & tuum prodiit; sed etiam professus sum in *Actis Eruditorum*, & alias quoque monui. Id enim candori meo convenire judicavi, non minus quam ipsius merito. Itaque communi nomine designare soleo † *Analyseos Infinitesimalis*; quæ latius quam Methodus *Tetragonistica* patet.

Interim, quemadmodum & *Vietæa* & *Cartesiana* methodus *Analyseos Speciosæ* nomine venit; discrimina tamen nonnulla supersunt: ita fortasse & *Newtoniana* & *Mea* differunt in nonnullis.

Mihi consideratio Differentiarum & Summarum in seriebus Numerorum, ** primam lucem affuderat, cum animadverterem Differentias Tangentibus, & Summas Quadraturis, respondere. Vidi ‡ mox Differentias Differentiarum in Geometria *Osculis* exprimi. Et notavi mirabilem analogiam relationis inter Differentias & Summas, cum relatione inter Potentias & Radices. Itaque judicavi, præter affectiones quantira-

tis

* Quasi *Leibnitius* hoc non advertisset anno 1677, ubi primum incidit in Methodum *Newtoni*. Vide literas ejus supra impressas, p. 90, 91. Certe Methodum *Newtoni* ante annum 1671 inventam fuisse *Leibnitius* ex Literis ejus intellexerat, sed in Actis *Lipsicis* hoc nunquam agnovit. Vide supra p. 70, 71, 72. Sic & se ab *Oldenburgo* Series *Newtonianas* & *Gregorianas* ineunte anno 1675 accepisse, statim oblitus est; p. 40, 41, 42, 45. Et Methodum Serierum se ab *Oldenburgo* postulasse & a *Newtono* accepisse, statim oblitus est; p. 45, 62, 98. Et Problemata Tangentium inversa ab Æquationibus & Quadraturis pendere se primum negasse & subinde a *Newtono* didicisse, statim oblitus est; p. 65, 85, 86, 93.

† Methodum Fluxionum & Methodum Differentialem esse unam & eandem Methodum *Leibnitius* hic agnoscit, ideoq; se communi nomine Analyseos Infinitesimalis designare solere, licet in nonnullis differre possint, ut Analysis speciosa Vietæ & ea *Cartesii* in nonnullis differunt. Quæritur quis sit Analyseos hujus Infinitesimalis inventor primus & ecquid alter alterius inventis addiderit.

** Fatetur hic *Leibnitius* Methodum Tangentium per Differentias primam lucem ipsi affudisse, id est, Methodum quam *Fermatius*, *Gregorius*, *Barrovius* coluere, *Newtonus* p. 14, 15, ad Quantitatum augmenta momentanea generaliter applicuit. Hancce Tangentium methodum *Leibnitius*, lectis *Newtonianis*, meditatur, p. 47, 71, 86, 87, 88, generalem reddit, p. 88, 89, & *Newtonianæ* similem esse statim videt, p. 90, 91, 93.

‡ *Fermatius* & *Schootenus* hoc antea viderunt, determinando Punctum flexus contrarii in Conchoide.

tis hactenus receptas y, y^2, y^3, $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{3}}$, &c. vel generaliter y^e, five $[p^e]y$, vel potentiæ ipsius y secundum exponentem e; posse adhiberi novas Differentiarum vel Fluxionum affectiones, dy, d^2y, (seu ddy,) d^3y, (seu $dddy$,) imo utiliter etiam occurrit $d^{\frac{1}{2}}y$, & similiter generaliterque d^ey.

Hac jam Affectione admissa, * vidi commode per Æquationes exprimi posse quantitates quas a sua Analysi & Geometria excluserat *Cartesius*; & Curvas, quas ille non recte vocat *Mechanicas*, hac ratione calculo non minus subjici, quam ab ipso in Geometriam receptas. Et, quemadmodum Veteres jam Æquationes Curvarum *Locales* observaverant, sed *Cartesius* tamen utilem operam nobis navavit dum eas calculo suo expressit: ita putavi me non inutiliter facturum, si ostenderem Methodum Curvas ab ipso exclusas similiter per Æquationes exprimendi; quarum ope omnia de iis certo calculi filo haberi possint.

Et licet fatear, quemadmodum rem ipsam, in Æquationibus Curvarum Localibus facilioribus, calculo *Cartesii* expressam, jam tenebant Veteres; ita rem ipsam, meis Æquationibus Differentialibus facilioribus expressam, non potuisse Tibi aliisque egregiis Viris esse ignotam: non ideo minus tamen puto & *Cartesium* & *Me* aliquod utile præstitisse. Nam antequam talia ad constantes quosdam Characteres calculi analytici reducuntur, tantumque omnia vi mentis & imaginationis sunt peragenda, non licet in magis composita abditaque penetrare; quæ tamen, calculo semel constituto, lusus quidem jocusque videantur.

Unde jam mirum non est, † Problemata quædam, post receptum calculum meum, soluta haberi, quæ antea vix sperabantur: Ea præsertim quæ ad transitum pertinent a Geometria ad Naturam. Quoniam scilicet Vulgaris Geometria minus sufficit, quoties Infiniti involvitur consideratio; quam plerisque Naturæ operationibus inesse consentaneum est, quo melius referat Autorem suum.

Hugenius certe, ** qui hæc studia haud dubie profundissime inspexerat, multisque modis auxerat, initio parvi faciebat Calculum meum, nondum perspecta ejus utilitate. Putabat enim dudum nota sic tantum nove exprimi: prorsus quemadmodum *Robervallius* & alii, initio, *Cartesii* Curvarum calculos parvi faciebant. Sed mutavit postea *Hugenius* sententiam suam,

* *Leibnitius* hoc non vidit ante annum 1677. Scripsit enim anno 1676 inversa Tangentium Problemata, & alia multa ab æquationibus non pendere. Rescripsit *Newtonus* hujusmodi Problemata in potestate esse, nempe per Æquationes suas. Et tum demum *Leibnitius* a *Newtono* admonitus hæc vidit. Vide pag. 65. lin. 14.

† Mirum est hæc a D. *Leibnitio* dici, qui ex Literis & Principiis *Newtoni* intellexerat Methodum solvendi hujusmodi Problemata *Newtono* ante annum 1671 innotuisse, & ipsum primum per hanc Methodum Problemata tractasse quæ ad transitum pertinent a Geometria ad Naturam.

** *Hugenius* Literas quæ inter *Newtonum* & *Leibnitium* mediante *Oldenburgo* intercesserant nunquam vidit.

fuam, cum videret quam commoda esset hæc exprimendi ratio, & quam facile per eam res involutissimæ evolverentur. Itaque maximi eam a se fieri aliquot ante obitum annis, non tantum in privatis ad me aliosque literis, sed publice quoque est professus.

Cæterum *Transcendentium* appellationem, nequid a me præter rationem in phrasi Geometrica novari putes, sic accipio ut Transcendentes quantitates opponam Ordinariis & Algebraicis: Et Algebraicas quidem vel Ordinarias voco Quantitates, quarum relatio ad datas exprimi potest Algebraice; id est, per Æquationes certi gradus, primi, secundi, & tertii, &c. quales quantitates *Cartesius* solas in suam Geometriam recipiebat: Sed *Transcendentes* voco, quæ omnem gradum Algebraicum transcendunt. Has autem exprimimus, vel per valores Infinitos, & in specie per Series, (neque enim ipsas Series *Transcendentales* voco, sed Quantitates ipsis exprimendas) vel per Æquationes Finitas; easque vel Differentiales (ut cum Ordinata Cycloidis Methodo mea exprimitur per Æquationem †$y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ay - yq}}$) vel Exponentiales, (ut cum incognita quædam x exprimitur per hanc Æquationem $x^x + x = 1$.) Et quidem Transcendentium Exponentialem pro perfectissima habeo; quippe qua obtenta, nihil ultra quærendum restare arbitror; quod secus est in cæteris.

Primus autem, ni fallor, etiam *Exponentiales* Æquationes introduxi, cum Ignota ingreditur Exponentem. Et jam anno primo * *Actorum Lipsiensium*, specimen dedi in exemplo quantitatis Ordinariæ *Transcendentaliter* expressæ, ut res fieret intelligibilior; Nempe, si quæratur $x^x + x = 30$, patet $x = 3$ satisfacere; cum sit $3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$.

* Imo Anno 1677. Vide pag. 94, 95. † Legendum $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax - xx}}$. Idem sic designari potest $y = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{ax - xx}}$, vel sic $\dot{y} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{ax - xx}}$. Et nota quod ubi Differentiæ referuntur ad Summas, rectius dicerentur Partes. Sunt enim non Differentiæ Summarum sed Partes, & nullam relationem habent ad Summas, nisi quatenus sunt earum Partes.

Ex Epistola Wallisii *ad* Leibnitium, Julii 30, 1697.

Optaverim item ut Tibi vacet tuum *Calculum Differentialem*, & *Newtono* suam *Fluxionum Methodum*, justo ordine exponere; ut quid sit utrique Commune, & quid intersit Discriminis, & utramque distinctius intelligamus. *

* Ut *Leibnitius* Differentiam Methodorum exponat iterum rogat *Wallisius*, sed frustra.

T.

In Dissertatione D. Nicolai Fatii Duillierii, *R. S. S. de investigatione Geometrica* Lineæ Brevissimi descensus *&c.* Londini *Anno* 1699 *edita. pag.* 18, *hac habentur.*

" NEwtonum primum, ac pluribus Annis vetustissimum, hujus Calculi " Inventorem, ipsa rerum evidentia coactus, agnosco: a quo utrum " quicquam mutuatus sit *Leibnitius* secundus ejus Inventor, malo eorum, " quam meum, sit Judicium, quibus visæ fuerint *Newtoni* Literæ aliique " ejusdem Manuscripti Codices.

Et respondit D. Leibnitius *in Actis Lipsiensibus Mense* Maii 1700.

" CErte cum Elementa calculi mea edidi anno 1684, ‡ ne constabat " quidem mihi aliud de Inventis ejus in hoc genere, quam quod " ipse olim significaverat in literis, posse se Tangentes invenire non subla- " tis Irrationalibus; quod *Hugenius* quoque se posse mihi significavit po- " stea, etsi cæterorum istius calculi adhuc expers: sed majora multo " consecutum *Newtonum*, viso demum libro Principiorum ejus satis in- " tellexi. Calculum tamen differentiali tam similem ab eo exerceri, non " ante didicimus, quam cum non ita pridem magni Geometræ *Johannis* " *Wallisii* operum volumina primum & secundum prodiere, *Hugeniusque* " curiositati meæ favens locum inde descriptum ad *Newtonum* pertinentem " mihi mature transmisit.

Et post aliqua: " Quam [*methodum*] ante Dominum *Newtonum* & me " nullus quod sciam Geometra habuit; uti ante hunc maximi nominis " Geometram, NEMO specimine publice dato se habere probavit: ante " Dominos *Bernoullios* & Me nullus communicavit.

‡ Constabat certe D. *Leibnitio*, jam ab anno 1677, Curvarum Quadraturas faciliores reddi, & Problemata Tangentium inversa D. *Newtoni* Methodis solvi; idque nonnunquam per quadraturas solas, nonnunquam per Methodos generaliores. Confer Literas ejus pag. 90, 91, & seq. cum pag. 71, 72, 85, 86, ut & cum pag. 30. lin. 15, 16, & pag. 47, lin. 4, 8, 15, &c.

D. Fatio *autem Replicationem suam ad Editores* Lipsienses *ut publicaretur mittente, Hi, quasi lites aversati, eandem Actis suis inserere recusarunt. Vide* Act. Lipf. Martii 1701, *pag.* 134.

Tandem

Tandem ubi prodiere Newtoni *Libri de Numero Curvarum ſecundi generis, deque Quadratura Figurarum, Editores* Actorum Lipſienſium, *ſtylo* Leibnitiano, *Synopſin libri prioris his verbis concluſerunt. Vide* Act. Lipſ. Januarii 1705.

CÆterum autor non attingit Focos vel Umbilicos Curvarum ſecundi generis & multo minus generum altiorum. Cum * *ergo ea res abſtruſioris ſit indaginis & maximi tamen in hoc genere uſus, tum ad deſcriptiones tum ad alias proprietates Curvarum, & doctrina hac Focorum ab illuſtriſſimo D.* ‖ D. T. *profundius ſit verſata; ſupplementum ejus pro his Curvis ab ipſius ingenio expectamus.*

Dein libri alterius Synopſin ſequentem (ſi Synopſis dici mereatur) eodem ſtylo ſubjunxerunt.

Ingenioſiſſimus deinde Autor antequam ad Quadraturas Curvarum (vel potius Figurarum Curvilinearum) ‡ *veniat, præmittit brevem* Iſagogen. *Quæ* † *ut melius intelligatur, ſciendum eſt cum magnitudo aliqua continue creſcit, veluti Linea (exempli gratia) creſcit fluxu Puncti quod eam deſcribit,* ** *incrementa illa momentanea appellari differentias, nempe inter magnitudinem quæ antea erat, & quæ per mutationem momentaneam eſt producta; atque hinc natum eſſe Calculum Differentialem, eique reciprocum Summatorium; cujus elementa ab inventore D.* Godefrido Guilielmo Leibnitio *in his Actis ſunt tradita, variique uſus tum ab ipſo, tum a D. D. Fratribus* Bernoulliis, *tum & D. Marchione* Hoſpitalio, *(cujus nuper extincti immaturam mortem omnes magnopere dolere debent, qui profundioris doctrinæ profectum amant) ſunt oſtenſi. Pro differentiis igitur* Leibnitianis *D.* Newtonus †† *adhibet, ſemperque adhibuit,* Fluxiones, quæ ſunt quam proxime ut Fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quam minimis genita; *iiſque tum in ſuis Principiis Naturæ Mathematicis, tum in aliis poſtea editis eleganter eſt uſus, quemadmodum &* Honoratus Fabrius *in ſua Synopſi Geometrica, motuum progreſſus* Cavallerianæ

* Compilatores Actorum in ſcribendis librorum Breviariis, a cenſuris temerariis abſtinere debent. Ex hac cenſura patet animus ſcriptoris in D. *Newtonum*.

‖ Literis D. T. *Tſchurnhauſius* deſignatur.

‡ Hæc *Iſagoge* & Corollarium Propoſitionis ultimæ ſcripta ſunt ubi liber prodiit, reliqua ex MS. antiquo manibus amicorum trito impreſſa ſunt.

† Ut *Iſagoge* melius intelligatur, *Leibnitius* deſcribit calculum ſuum differentialem & omittit calculum *Newtonianum*, quem ſolum deſcribere debuiſſet. Hoc fecit, non ut calculus *Newtonianus* in *Iſagoge* traditus melius intelligatur, ſed ut rejiciatur.

** Incrementa illa momentanea *Newtonus* momenta, *Leibnitius* poſtea differentias vocavit. Et inde natum eſt nomen Calculi differentialis.

†† Senſus verborum eſt quod *Newtonus* Fluxiones Differentiis *Leibnitianis* ſubſtituit, quemadmodum *Honoratus Fabrius* motuum progreſſus *Cavallerianæ* methodo ſubſtituerat; id eſt quod *Leibnitius* Author primus fuit hujus Methodi, & *Newtonus* eandem a *Leibnitio* habuit, ſubſtituendo Fluxiones pro Differentiis.

vallerianæ *methodo substituit.* Subinde Editores vice Symbolorum *Newtoni* describunt symbola *Leibnitii*, & postea librum *Newtoni* sic breviter attingunt. *Cum regressus a Differentiis ad quantitates, vel a quantitatibus ad summas, vel denique a Fluxionibus ad Fluentes non semper Algebraice fieri possit, ideo quærendum est, tum quibus casibus Quadratura Algebraice succedat, tum quomodo Algebraico successu deficiente aliquid subsidiarium adhiberi queat. In utroque enim a D.* Newtono *est utilissime laboratum, tum alias, tum in hoc Tractatu de Quadraturis, ubi Series adhibet Infinitas quæ eo casu quo abrumpuntur seu finiuntur, quæsitum Algebraice exhibent. De* ** *quo etiam dictum est nuper in recensione Tractatus D.* Cheynæi, *Medici* Scoti Londini *degentis. Conferri etiam potest Tractatus D.*Craigii Scoti *de Quadraturis, & ejusdem Theorema ad Quadraturas pertinens, nuper in his Actis exhibitum; quæ faciunt etiam ut ipsis Theorematis* Newtonianis *recensendis supersedeamus, quia paucis exponi non possunt : quemadmodum nec ejusdem Theoremata quædam reductionis ad Quadraturas faciliores.*

** Sensus est quod, Quæ *Newtonus* habet in hoc Tractatu de Quadraturis, & speciatim de Quadraturis illis ubi Series abrumpuntur vel finiuntur, a *Cheynæo* & *Craigio* prius dicta sunt, & in his Actis nuper exhibita; quæ quia multa sunt faciunt ut a *Newtonianis* recensendis Editores Actorum supersedeant. Et eodem sensu D. *Leibnitius* ad Secretarium Societatis Regiæ nuper scripsit, *suum cuique hic redditum esse*, quasi secundam *Newtoni* ad *Oldenburgum* Epistolam ad se missam & supra impressam nunquam legisset. Vide pag. 72, 73, 74, 76.

His permotus D. Joannes Keill, *in Epistola in* Philosophicis Transactionibus *A. C.* 1708, *mensibus* Maio *&* Junio *impressa, scripsit in contrarium, quod* Fluxionum Arithmeticam, sine omni dubio, primus invenit Dominus *Newtonus*, ut cuilibet ejus Epistolas a *Wallisio* editas legenti facile constabit. Eadem tamen Arithmetica postea mutatis Nomine & Notationis modo, a Domino *Leibnitio* in *Actis Eruditorum* edita est.

Epistola D. Leibnitii *ad D.* Hans Sloane *Regiæ Societatis Secretarium*, 4°. Martii *S. N.* 1711 *data.*

GRatias ago quod novissimum Volumen præclari Operis *Transactionum Philosophicarum* ad me misisti; quamvis nunc demum mihi *Berolinum* excurrenti redditum sit. Itaque excusabis quod pro munere superioris anni nunc demum gratiæ dudum debitæ redduntur.

Vellem inspectio Operis me non cogeret nunc secunda vice ad vos querelam deferre : Olim *Nicolaus Fatius Duillierius* me pupugerat in publico

 scripto,

ſcripto, tanquam alienum Inventum mihi attribuiſſem. Ego eum in *Actis Eruditorum Lipſienſibus* meliora docui; & vos ipſi, ut ex Literis a Secretario Societatis veſtræ inclytæ (id eſt, quantum memini, a Teipſo) ſcriptis didici, hoc improbaſtis. Improbavit *Newtonus* ipſe vir excellentiſſimus, (quantum intellexi) præpoſterum quorundam hac in re erga veſtram gentem & ſe ſtudium. Et tandem D. *Keillius* in hoc ipſo volumine, menſe *Sept. Octob.* 1708, pag. 185, renovare ineptiſſimam accuſationem viſus eſt, cum ſcripſit, *Fluxionum Arithmeticam a* Newtono *inventam, mutato nomine & notationis modo a me editam fuiſſe.* Quæ qui legit, & credit, non poteſt non ſuſpicari alterius inventum a me larvatum ſubdititiis nominibus characteribuſque fuiſſe protruſum. Id quidem quam falſum ſit nemo melius ipſo D. *Newtono* novit. Certe ego nec nomen Calculi Fluxionum fando audivi, nec Characteres quos adhibuit D. *Newtonus* his oculis vidi, antequam in *Walliſianis* Operibus prodiere. Rem etiam me habuiſſe, multis ante annis quam edidi, ipſæ literæ apud *Walliſium* editæ demonſtrant. Quomodo ergo aliena mutata edidi quæ ignorabam.

Etſi autem D. *Keillium* (a quo magis præcipiti judicio quam malo animo peccatum puto) pro calumniatore non habeam; non poſſum tamen non ipſam accuſationem in me injuriam pro calumnia habere. Et quia verendum eſt ne ſæpe vel ab improbis vel ab imprudentibus repetatur; cogor remedium ab Inclyta veſtra Societate Regia petere. Nempe æquum eſſe vos ipſi credo judicabitis, ut D. *Keillius* teſtetur publice, non fuiſſe ſibi animum imputandi mihi quod verba inſinuare videntur, quaſi ab alio hoc quicquid eſt Inventi didicerim & mihi attribuerim. Ita ille & mihi læſo ſatisfaciet, & calumniandi animum a ſe alienum eſſe oſtendet; & aliis aliàs ſimilia aliquando jactaturis frœnum injicietur. Quod ſupereſt vale & fave.

Dabam *Berolini* 4 *Martii* 1711.

Epiſtola D. Johannis Keill, *A. M. ex Æde Chriſti* Oxon, R. S. *Socii, & jam Aſtronomiæ Profeſſoris* Saviliani, *ad D.* Hans Sloane *M. D.* Regiæ Societatis *Secretarium*, *cum D.* Leibnitio *communicanda.*

CUM D. *Leibnitii* Epiſtolam mecum Vir Cl. communicare dignatus ſis; ea etiam quæ mihi viſum fuerit reſcribere, ne graveris accipere. Sentio Virum egregium acerrime de me queri, quaſi ei injuriam fecerim, & rerum a ſe inventarum gloriam alio tranſtulerim; fateor querelam hanc ideo mihi moleſtam eſſe, quod nolim ea ſit de me hominum Opinio, quaſi ego calumniandi ſtudio, cuiquam in rebus Mathematicis verſanti, nedum

nedum Viro in iisdem versatissimo, obtrectarem ; certe nihil ab ingenio meo magis alienum est, quam alterius laboribus quicquam detrahere.

Agnosco me dixisse Fluxionum Arithmeticam a D. *Newtono* inventam fuisse, quæ mutato Nomine & Notationis modo a *Leibnitio* edita fuit ; sed nollem hæc verba ita accipi, quasi aut Nomen quod Methodo suæ imposuit *Newtonus*, aut Notationis formam quam adhibuit, D. *Leibnitio* innotuisse contenderem ; sed hoc solum innuebam D. *Newtonum* fuisse primum inventorem Arithmeticæ Fluxionum, seu Calculi Differentialis ; eum autem in duabus ad *Oldenburgum* scriptis Epistolis, & ab illo ad *Leibnitium* transmissis, indicia dedisse perspicacissimi ingenii viro satis obvia ; unde *Leibnitius* principia istius Calculi hausit, vel saltem haurire potuit : At cum Loquendi & Notandi formulas, quibus usus est *Newtonus*, Ratiocinando assequi nequiret Vir illustris, suas imposuit.

Hæc ut scriberem impulerunt Actorum Lipsiensium Editores, qui in ea quam exhibent operis *Newtoniani* de Fluxionibus seu Quadraturis enarratione, diserte affirmant D. *Leibnitium* fuisse istius Methodi Inventorem, & *Newtonum* aiunt pro Differentiis *Leibnitianis* Fluxiones adhibere, semperque adhibuisse. Id quidem in iisdem scriptoribus observatu dignum, quod Loquendi & Notandi formam a *Newtono* adhibitam, in *Leibnitianam* passim in eadem enarratione transferunt ; de Differentiis scilicet & Summis & calculo Summatorio loquuntur, de quibus est nullus apud *Newtonum* Sermo ; quasi inventa *Newtoni Leibnitianis* posteriora fuerint, & a Calculo *Leibnitii* in Actis Lipsiensibus Anno 1684 descripto ortum derivarint. Cum revera *Newtonus*, ut ex sequentibus patebit, Fluxionum Methodum invenerit, octodecim saltem annos antequam *Leibnitius* quicquam de Calculo Differentiali edidisset, Tractatumque de ea re conscripserit ; cujus cum specimina quædam *Leibnitio* ostensa sint, rationi non incongruum est, ea aditum illi ad Calculum Differentialem aperuisse.

Unde si quid de *Leibnitio* liberius dixisse videar, id eo animo feci, non ut ei quicquam eriperem, sed ut quod *Newtoni* esse arbitrabar auctori suo vindicarem.

Maxima equidem esse *Leibnitii* in Rempublicam Literariam merita lubens agnosco ; nec eum in reconditiore Mathesi Scientissimum esse diffitebitur qui ejus in Actis Lipsiensibus scripta perlegerit : cum autem tantas tamque indubitatas opes de proprio possideat, certe non video cur spoliis ab aliis detractis onerandus sit. Quare cum intellexerim populares suos ita illi favere, ut eum laudibus non suis accumulent ; *haud præposterum in gentem nostram studium esse duxi*, si *Newtono* quod suum est tueri & conservare anniterer. Nam si Lipsiensibus fas fuerit aliena *Leibnitio* affingere, *Britannis* saltem ea quæ a *Newtono* erepta sunt sine crimine calumniæ reposcere licebit ; itaque cum ad Regiam Societatem appellet Vir illustris, meque publice testari velit calumniandi animum a me alienum esse ; ut Calumniandi crimen a me amoveam, mihi ostendendum incum-

incumbit D. *Newtonum* verum & primum fuiſſe Arithmeticæ Fluxionum ſeu Calculi Differentialis Inventorem; deinde ipſum adeo clara & obvia Methodi ſuæ indicia *Leibnitio* dediſſe, ut inde ipſi facile fuerit in eandem Methodum incidere.

Sciendum vero primum eſt, Celeberrimos tunc temporis Geometras, Dominos *Franciſcum Sluſium*, *Iſaacum Barrovium*, & *Jacobum Gregorium*, Methodum habuiſſe qua Curvarum Tangentes ducebant, quæ a Fluxionum Methodo non multum abludebat; & iiſdem principiis innixa fuit. Nam ſi pro Litera *o*, quæ in *Jacobi Gregorii* Parte Matheſeos Univerſali quantitatem infinite parvam repræſentat; aut pro Literis *a* vel *e* quas ad eandem deſignandam adhibet *Barrovius*; ponamus $\dot{x}$ vel $\dot{y}$ *Newtoni*, vel d*x* ſeu d*y* *Leibnitii*, in Formulas Fluxionum vel Calculi Differentialis incidemus, & regreſſus quo a data Tangentium proprietate ad naturam Curvæ perveniebant, (quem Methodum Tangentium inverſam nominabant) eadem plane res erat ac Methodus qua a Fluxionibus ad Fluentes revertitur: interim ſuam Methodum non ultra Fluxiones primas extendebant; neque eandem ad Quantitates Surdis aut Fractionibus involutas accommodare potuerunt. At prius quam quicquam de hoc argumento a ſummis hiſce viris publico datum eſt, D. *Newtonus* Methodum excogitavit, priori quidem non diſſimilem ſed multo latius patentem, quæ non ſubſtitit ad Æquationes eas in quibus una vel utraque quantitas indefinita Radicalibus eſt involuta, ſed abſque ullo æquationum apparatu Tangentem confeſtim ducere monſtrabat, Quæſtiones de Maximis & Minimis eodem Artificio tractabat, & Speculationes de Quadraturis facilius explicuit. Hæc conſtant ex Epiſtola *Newtoni* ad D. *Collinium* data, *Decembris* Die 10, Anno 1672, & inter *Collinii* Chartas reperta.

Hæc Epiſtola habetur impreſſa pag. 29, 30.

Ex hac Epiſtola clare conſtat D. *Newtonum* Methodum Fluxionum habuiſſe ante annum 1670, eodem nempe quo *Barrovii* Lectiones editæ ſunt.

Anno 1669 miſit *Newtonus* ad D. *Collinium* Tractatum de Analyſi per Æquationes Infinitas; quem etiam inter ſchedas *Collinii* repertum D. *Jones* nuper edidit. Sub hujus fine habetur demonſtratio Regulæ pro Quadraturis Curvarum, nata ex proportione Augmentorum naſcentium Abſciſſæ & Ordinatæ, cum Abſciſſa ſit *x* & Ordinata $x^{\frac{m}{n}}$; quæ quidem demonſtratio commune fundamentum eſt tam Doctrinæ Fluxionum, quam Calculi Differentialis: ex eo autem Tractatu non pauca amicis ſuis communicanda deprompſit *Collinius*. Unde certum eſt D. *Newtono* ante illud tempus Fluxionum Arithmeticam innotuiſſe. Præterea conſtat ex poſteriore *Newtoni* ad *Oldenburgum* Epiſtola: " Eum ſuadentibus amicis " circa annum 1671 Tractatum de hiſce rebus conſcripſiſſe; quem una " cum Theoria Lucis & Colorum in publicum dare ſtatuerat: ſcribitque

" *Oldenburgo*

" *Oldenburgo* Series Infinitas non magnam ibi obtinuisse partem; seque
" alia haud pauca congessisse, inter quæ erat Methodus ducendi Tangen-
" tes quam solertissimus *Slusius* ante annos duos tresve cum *Oldenbur-*
" *go* communicaverat; sed quæ generalior facta, non ad Æquationes,
" quæ Surdis aut Fractionibus involutæ sunt, hærebat; & eodem fun-
" damento usum ad Theoremata generalia, Quadraturas Curvarum
" spectantia, pervenisse se ait *Newtonus*. Horum unum Exempli loco in
" ipsa Epistola ponit; Seriem exhibens cujus termini dant Quadraturam
" Curvæ, cum abscissa est z & Ordinatim-applicata $dz^{\theta} \times \overline{e+fz^{\eta}}|^{\lambda}$. Quæ Series abrumpitur & terminis finitis Curvæ Quadraturam comprehendit, quandocunque illa finita æquatione exprimi potest. Hoc dicit esse primum Theorematum Generaliorum; unde sequitur eum alia ad Casus difficiliores & magis intricatos accommodata habuisse: est autem Theorema illud propositio V in Tractatu de Quadraturis. Eodem etiam spectat ejusdem Prop. VI, sed ad Casus magis implicatos se extendit. Propositiones Tertia & Quarta sunt Lemmata Theor. hisce demonstrandis præmissa, Secunda autem in Quadraturis propositio extat in Tractatu de Analysi per Æquationes Infinitas, & prima Propositio est ea ipsa, quam in dicta Epistola fundamentum Operationum vocat, & transpositis Literis celari tunc voluit. Scribit etiam *Newtonus* se dudum Theoremata quædam, quæ comparationi Curvarum cum sectionibus Conicis inserviant, in Catalogum retulisse, & Ordinatas Curvarum quæ ad eam normam comparari possunt, in eadem Epistola describit; quæ profecto eadem plane sunt cum iis, quas Tabula secunda ad Scholium Propositionis X in Tractatu de Quadraturis, exhibet; unde satis liquet Tabulam illam & Propositiones 7, 8, 9 & 10 quæ sunt in Tractatu de Quadraturis, (a quibus Tabula pendet) *Newtonum* dudum invenisse ante annum 1676, quo scripta est Epistola illa posterior. Cum vero, in prima ad *Oldenburgum* Epistola, dicit se ab ejusmodi studiis per Quinquennium abstinuisse, hinc satis clare colligi potest, Propositiones in Tractatu de Quadraturis a D. *Newtono* inventas fuisse, quinquennio saltem antequam Epistolæ illæ ad *Oldenburgum* scriptæ essent, totamque illam de Fluxionibus Doctrinam, ante illud tempus ulterius a *Newtono* provectam esse, quam ad hunc usque diem a quoquam alio factum est sub nomine Calculi Differentialis. Certe neminem novi qui in hac provincia peragranda æquis passibus cum *Newtono* progressus sit: & pauci sunt, iique insignes Geometræ, qui prospicere queant, quousque ille in eadem provincia processerit. Præterea in posteriore illa ad *Oldenburgum* Epistola modum describit, quo in Seriem inciderit cujus termini Fluxiones seu Differentias quantitatum in infinitum exhibent; quæ postquam inventa esset, dicit Pestem ingruentem ipsum coegisse hæc studia deserere & alia cogitare. At Pestis illa contigit Annis 1665 & 1666; unde patet, etiam ante illud tempus Fluxionum Calculum D. *Newtono* innotuisse, hoc est duodecim saltem Annos ante-

 quam

quam Calculum suum *Oldenburgo* communicavit *Leibnitius*; & novemdecim annos antequam Vir Illustris eandem in Actis Lipsiensibus edidit: & certe ante visas hasce duas *Newtoni* Epistolas, *Leibnitium* Calculum suum Differentialem habuisse nulla apparent vestigia. His omnibus rite perpensis certissime cuivis constabit, D. *Newtonum* pro vero Inventore Arithmeticæ Fluxionum habendum esse.

Restat jam ut inquiramus quænam fuere Indicia *Leibnitio* a *Newtono* derivata, unde ei facile foret Calculum Differentialem elicere. Et primo, ut dixi, nullibi ostendit *Leibnitius* sibi notum fuisse Calculum Differentialem, ante visas has duas *Newtoni* Epistolas; imo ante illud tempus longiore usus est circuitu, cum res facilius multo & succinctius ex Calculo fluerent Differentiali. Hujus rei testis sit Epistola ad *Oldenburgum* data $\frac{18}{28}$ *Novembris* 1676, quæ in Operum *Wallisianorum* Tomo tertio etiam extat, in qua modum tradit exprimendi rationem subtangentis ad Ordinatam, in terminis quos non ingreditur Ordinata; ubi si loco y & dy ipsarum valores vinculo inclusos posuisset, statim scopum attigisset.

In prima Epistola quæ per *Oldenburgum* ad *Leibnitium* transmissa est, docuit *Newtonus* methodum qua quantitates in Series Infinitas reducendæ sint, *i. e.* qua quantitatum fluentium incrementa exhiberi possunt. In ipso enim initio Seriem ostendit, cujus Termini hæc incrementa repræsentant. Sed illa D. *Leibnitium* prorsus latebat, ante visam *Newtoni* Epistolam qua exponitur.

Sit o incrementum momentaneum quantitatis fluentis x, & $\frac{m}{n}$ index dignitatis ejusdem, & si pro x scribatur $x+o$, $x+2o$, $x+3o$, $x+4o$, &c. et Quantitates $\overline{x+o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+2o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+3o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+4o}|^{\frac{m}{n}}$, &c. in Series Infinitas expandantur, habebimus totidem Series, quarum prima hæc est quæ sequitur, $x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m^2-mn}{2n^2}oox^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3}ooox^{\frac{m-3n}{n}}$ &c.

In omnibus Seriebus primus terminus erit ipsa quantitas fluens $x^{\frac{m}{n}}$; & si prior qualibet Series a posteriore auferatur, habebimus harum Serierum differentias primas, in quibus omnibus primus terminus est Seriei primæ terminus primus quem ingreditur quantitas o, scil. $\frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}}$; & evanescente o fit ille terminus differentiis hisce primis æqualis; vel quod idem est, erit quantitas $\frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}}$ Fluentis incrementum primum.

Præterea si differentia qualibet prior a posteriori auferatur, devenimus ad differentias secundas; quarum omnium terminus primus per 2 divisus,

visus, idem est cum termino secundo Seriei primæ quem ingreditur quantitas o; & evanescente o fiunt differentiæ illæ per Binarium divisæ singulæ æquales termino illo primo Seriei, qui est $\frac{m^2-mn}{2n^2}oox^{\frac{m-2n}{n}}$. Et eodem modo inveniemus supra descriptæ Seriei terminum $\frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3}ooox^{\frac{m-3n}{n}}$, æqualem esse singulis differentiis tertiis per sex divisis. Et quilibet terminus ejusdem Seriei ad differentias respectivas semper habebit datam rationem, scil. terminus primus quem ingreditur o æqualis est differentiis primis, secundus est differentiarum secundarum pars media, tertius pars sexta differentiarum tertiarum &c. Hasce Series, quarum termini differentias omnes in infinitum repræsentant, invenit *Newtonus*, uti dixi, ante annum 1665; sed illæ ante visam *Newtoni* Epistolam, in qua exponitur, D. *Leibnitium* * latebant; nam ante illud tempus agnoscit *Leibnitius* semper ipsi necesse fuisse transmutare quantitatem irrationalem in Fractionem rationalem, & deinde, dividendo *Mercatoris* Methodo, Fractionem in Seriem reducere. Exinde etiam patet Seriem hanc differentias continentem non habuisse D. *Leibnitium*, quod postquam ipsi per *Oldenburgum* ostensa est, * rogat ut D. *Newtonus* ipsius originem sibi pandat.

Sit jam quantitas quælibet ex constanti & indeterminatis utcunque composita & vinculo inclusa, scil. $\overline{a+bx^c}|^{\frac{m}{n}}$, cujus differentia habenda est; constat per Regulam prius traditam quantitatis $a+bx^c$ differentiam esse $cbx^{c-1}o$ (posito quod o sit incrementum momentaneum Fluentis x) quare si pro $a+bx^c$ scribatur z, & pro $cbx^{c-1}o$ scribatur ω, erit $\overline{a+bx^c+cbx^{c-1}o}|^{\frac{m}{n}} = \overline{z+\omega}|^{\frac{m}{n}}$; quæ si per regulam *Newtoni* in Seriem expandatur, fit $z^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\omega z^{\frac{m-n}{n}} +$ &c. cujus Seriei terminus $\frac{m}{n}\omega z^{\frac{m-n}{n}}$ est differentia prima quantitatis $z^{\frac{m}{n}}$, seu $\overline{a+bx^c}|^{\frac{m}{n}}$. Unde si loco z & ω restituantur ipsorum valores, $a+bx^c$ & $cbx^{c-1}o$, habebimus differentiam quantitatis $\dot{\overline{a+bx^c}}|^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}cbx^{c-1}o\times\overline{a+bx^c}|^{\frac{m-n}{n}}$: vel si more *Leibnitiano* pro o ponatur dx, erit quantitatis $\overline{a+bx^c}|^{\frac{m}{n}}$ differentia $\frac{m}{n}cbx^{c-1}dx\times\overline{a+bx^c}|^{\frac{m-n}{n}}$; ubi videmus quantitatem differentialem $\frac{m}{n}cbx^{c-1}dx$ extra vinculum semper manere. Atque hinc facile fuit D. *Leibnitio*, ope Regulæ *Newtonianæ*, diffe-

* Vide Epistolam *Leibnitii* ad *Oldenburgum* 27 *Augusti* 1676. pag. 63. l. 10.

differentias quantitatum omnium exhibere, utcunque quantitates fluentes Surdis aut Fractionibus sint implicatæ : id quod ante Epistolicum illud per *Oldenburgum* cum *Newtono* commercium ipsi minime notum fuit.

Quamvis hæc per se satis manifesta sunt Calculi Differentialis indicia ; in secunda tamen Epistola quæ per *Oldenburgum* ad *Leibnitium* missa est, alias adhuc clariores describit *Newtonus* Methodi suæ notas. Dicit enim se habuisse methodum ducendi Tangentes, quam solertissimus *Slusius* ante annos duos tresve *Oldenburgo* impertitus est, ita ut habito suo fundamento nemo posset Tangentes aliter ducere, nisi de industria a recto tramite erraret. Quinetiam ibi quoque ostendit "Methodum hanc non hærere
" ad æquationes quibus una vel utraque quantitas indefinita radicalibus
" involuta est ; sed absque ulla æquationum reductione (quæ opus ple-
" rumque redderet immensum) Tangentem confestim duci, & eodem
" modo in quæstionibus de Maximis & Minimis aliisque quibusdam
" rem sic se habere. Fundamentum harum Operationum dicit esse satis
" obvium, quod tamen transpositis literis in illa Epistola celare voluit :
" hoc etiam adjicit, hoc Fundamento speculationes de Quadraturis Cur-
" varum simpliciores se reddidisse ; & ad Theoremata quædam generalia
" se pervenisse scribit.

Cum vero Methodus *Slusiana* tunc temporis *Leibnitium* minime latere potuit ; utpote in Actis Philosophicis *Lond.* publicata : Cumque *Newtonus* dicit eandem & sibi innotuisse, ex fundamento quo habito non hærebat ad æquationes radicalibus utcunque involutas ; (in qua quidem tota rei difficultas posita est.) Cumque in priore Epistola Seriem descripsit, cujus ope differentiæ haberi possunt, ubi Fluentes Surdis aut Fractionibus utcunque implicatæ sunt : Cum denique idem Fundamentum ad Quadraturas Curvarum se applicuisse dicit ; minime dubitandum est hæc omnia facem *Leibnitio* prætulisse, quo facilius Methodum *Newtoni* perspiceret.

Quod si hæc non suffecisse videantur indicia ; etiam ulterius processit *Newtonus*, & Exempla Methodi suæ dedit, & Regulam ostendit, qua ex datis quarundam Curvarum Ordinatis, earundem Areæ exhibentur in terminis finitis, cum hoc fieri potest ; hoc est, in Stylo *Leibnitiano*, ipsi exempla tradidit quibus a Differentiis ad Summas pervenitur. Et a simplicioribus orsus,* proponit primo Parabolam cujus abscissa est z, & Ordinatim applicata $\sqrt{az} = a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$, & Curvæ Area erit $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$; hoc est, quando differentia Areæ est $dz \times \sqrt{az}$, seu $a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} \times dz$, ostendit fore Aream $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$; unde vicissim concluditur, si quantitas differentianda sit $a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$, fore ejus differentiam $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}dz$ seu $\frac{3}{2}dz\sqrt{az}$. Exemplum ejus secundum est Curva cujus abscissa est z, & Ordinatim-applicata $\frac{a^4 z}{\overline{c^2 - z^2}|^2}$: ubi ostendit *Newtonus*

* Vide pag. 72.

Curvæ

Curvæ Aream fore $\frac{a^4}{2c^2 - 2z^2}$, hoc est si differentia Areæ sit $\frac{a^4 z dz}{\overline{c^2 - z^2}|^2}$, ostendit Aream fore $\frac{a^4}{2c^2 - 2z^2}$. Unde vicissim si quantitas differentianda sit $\frac{a^4}{2c^2 - 2z^2}$, concludi potest differentiam fore $\frac{a^4 z \times dz}{\overline{c^2 - z^2}|^2}$. Vel si ejusdem Curvæ Ordinata sic enuncietur $\frac{a^4}{z^3 \times \overline{c^2 z^{-1} - 1}|^2}$, erit Area $= \frac{a^4 z^2}{2c^4 - 2c^2 z^2}$. Quare & vicissim, si quantitas differentianda sit $\frac{a^4 z^2}{2c^4 - 2c^2 z^2}$, erit differentia $\frac{a^4 dz}{z^3 \times \overline{c^2 z^{-1} - 1}|^2}$.

Hinc ad exempla quædam difficiliora progreditur *Newtonus*, in iisque ostendit, quomodo ab Ordinatis, hoc est a Differentiis ad Summas perveniendum sit: ex quibus patebit, Curvam omnem quadrabilem fore, cujus Ordinata in Differentiam Abscissæ ducta sit quantitatis alicujus differentia; & hinc innumera Curvarum genera assignari possunt etiam Geometrice quadrabilia.

His indiciis atque his adjutum Exemplis, Ingenium vulgare Methodum *Newtonianam* penitus discerneret; ita ut ne suspicari fas sit, eam acerrimum *Leibnitii* acumen posse latuisse; quem quidem usum fuisse his ipsis clavibus, ad hæc sua quæ feruntur inventa, aditum, etiam ex ipsius ore satis eluceslit. Nam in Epistola ad *Oldenburgum* data, post explicatum Calculum Differentialem, exemplum addit, quod coincidere agnoscit cum Regula *Slusiana*, & postea addit. * " Sed Methodus ipsa priore " nostra longe est amplior, non tantum enim exhiberi potest cum plures " sint literæ indeterminatæ quam x & y (quod sæpe fit maximo cum fru- " ctu) sed & tunc utilis est, cum interveniunt Irrationales, quippe quæ " eam nullo morantur modo, neque ullo modo necesse est Irrationales " tolli; quod in Regula *Slusii* necesse est, & Calculi difficultatem in " immensum auget." Hæc omnia a *Newtono* prius in secunda ejus Epistola dicta sunt. Inde Exempla proponit, quorum quidem quod primum est, rescio quo fato, idem prorsus est ac id, quod, in ea Epistola quam *Leibnitio* transmiserat *Oldenburgus*, etiam primum protulerit *Newtonus*.

Mox addit Vir illustrissimus, * " Arbitror quæ celare voluit *Newtonus* de " Tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit ex hoc Fun- " damento Quadraturas quoque reddi faciliores, me in hac sententia con- " firmat: nimirum semper Figuræ illæ quadrabiles, quæ sunt ad Æqua- " tionem Differentialem. Æquationem Differentialem voco talem qua " valor ipsius dx exprimitur, quæque ex alia derivata est, qua valor ip-

* Vide pag. 89, 90.

" fius *x* exprimebatur." Et paulo poſt, ſuam de hac re Sententiam plenius aperit, dicitque hanc unicam Regulam pro infinitis Figuris quadrandis inſervire, diverſæ plane naturæ ab iis quæ hactenus quadrari ſolebant. Quis eſt jam qui hæc perpendet & non videbit Indicia & Exempla *Newtoni* ſatis a *Leibnitio* perſpecta fuiſſe; ſaltem quoad differentias primas? Nam quoad Differentias ſecundas, *Leibnitium* Methodum *Newtonianam* tardius intellexiſſe videtur, quod brevi forſan clarius monſtrabo.

Interim facile illuſtri Viro aſſentior, & credo eum nec nomen Calculi Fluxionum fando audiviſſe; nec Characteres quos adhibuit *Newtonus* oculis vidiſſe, ante quam in *Walliſianis* operibus prodiere. Obſervo enim ipſum *Newtonum* ſæpius mutaſſe Nomen & Notationem Calculi. In Tractatu de Analyſi Æquationum per Series Infinitas, incrementum Abſciſſæ per literam *o* deſignat: Et in Principiis Philoſophiæ Fluentem quantitatem Genitam vocat, ejuſque incrementum Momentum appellat: Illam literis majoribus A vel B, hoc minuſculis *a* & *b* deſignat.

Id etiam ultra agnoſco, inter cætera quæ de re Mathematica præclare meritus eſt *Leibnitius*, hoc itidem illi deberi, quod primus fuerit qui Calculum hunc typis edidit & in publicum produxit: itaque eo ſaltem nomine magnam apud Matheſeos amantes inibit gratiam, quod Inventum ita nobile, & in multiplices uſus deducendum, diutius eos noluerit latere.

Habes Vir Cl. quæ de hoc argumento ſcribenda duxi, unde facile credo percipies, hoc qualecunque fuerit meum in Gentem noſtram ſtudium, ita parum præpoſterum fuiſſe, ut nihil omnino niſi quod *Newtoni* erat *Leibnitio* detraxerim; nec dubito quin æqui rerum æſtimatores uno ore fateantur me, uti nullo calumniandi animo, ita nec præcipiti Judicio, ea dixiſſe, quæ tibi tot argumentis luce meridiana clarius comprobavi.

Lecta eſt hæc Epiſtola coram Regia Societate, in Conventu die 24° Maii 1711 *habito, & ut Exemplar ejus D.* Leibnitio *mitteretur D.* Sloane *Secretario ſuo mandatum eſt.*

Epiſtola D. Leibnitii *ad D.* Hans Sloane *M. D. & R. S. Secr.*

QUÆ D. *Johannes Keillius* nuper ad Te ſcripſit, candorem meum apertius quam ante oppugnant: quem ut ego hac ætate, poſt tot documenta vitæ, Apologia defendam, & cum homine docto, ſed novo, & parum perito rerum anteactarum cognitore, nec * mandatum habente ab eo cujus intereſt, tanquam pro Tribunali litigem, nemo prudens æquuſque probabit.

* Quaſi Methodum *Moutoni*, & Series *Brounkeri*, *Walliſii* & *Gregorii* aliorumque Inventa non liceat propriis authoribus, niſi authoritate ab his accepta, aſſerere.

Quæ

Quæ ille de meo rem cognoſcendi modo ſuſpicatur, haud ſatis exercitatus artis Inveniendi arbiter, ipſius quidem docendi cauſa non eſt cur refellam : ſed norunt * amici quam longe alio & ad alia proficuo itinere proceſſerim. Fruſtra ad Exemplum Actorum Lipſienſium provocat, ut ſua dicta excuſet ; in illis enim circa hanc rem quicquam cuiquam detractum non reperio, ſed potius paſſim † ſuum cuique tributum. Ego quoque & amici aliquoties oſtendimus libenter a nobis credi, illuſtrem *Fluxionum* Autorem per ſe ad ſimilia noſtris fundamenta perveniſſe. Neque eo minus Ego in Inventoris jura venio, quæ etiam *Hugenius*, judex intelligentiſſimus incorruptiſſimuſque, publice agnovit : in quibus tamen mihi vendicandis ** non properavi, ſed inventum †† pluſquam nonum in annum preſſi, ut nemo me præcucurriſſe queri poſſit.

Itaque veſtræ æquitati committo, annon coercendæ ſint vanæ & injuſtæ vociferationes, quas ‡ ipſi *Newtono*, Viro inſigni & geſtorum optime conſcio, improbari arbitror : ejuſque Sententiæ ſuæ libenter daturum Indicia mihi perſuadeo.

VALE.

Dabam *Hannoveræ*

29 Decemb. 1711.

* Si Amici illi ſunt *Germani*, invenit is hanc Methodum poſt reditum ſuum in *Germaniam*.

† Scripſerat *Keillius* in hæc verba. *Hæc ut ſcriberem impulerunt Actorum Lipſienſium Editores, qui in ea quam exhibent operis* Newtoniani *de Fluxionibus ſeu Quadraturis Enarratione, diſerte affirmant D.* Leibnitium *fuiſſe iſtius Methodi Inventorem, &* Newtonum *aiunt pro Differentiis* Leibnitianis *Fluxiones adhibere ſemperque adhibuiſſe. Leibnitius* Editores hic palam defendit contra *Keillium*, quaſi ſuum cuique reddidiſſent.

** In Epiſtola *Aug.* 27. 1676, properavit ſe coinventorem Methodi Serierum proponere. In Epiſtola *Junii* 21. 1677, properavit Methodum ut ſuam deſcribere, de qua *Newtonus* tractatum ante annos quinque ſcripſerat. In Schedis tribus anno 1689 impreſſis, properavit Propoſitiones principales *Principiorum Philoſophiæ* ad Calculum ſuum revocatas in lucem edere, ut in Inventoris jura veniret.

†† Probandum eſt.

‡ *Newtonus* & *Leibnitius* nec ſunt idonei Judices nec Teſtes. Ex monumentis antiquis judicium ferendum eſt.

Cum

Cum D. *Leibnitius* a D. *Keill* ut homine novo ad Societatem Regiam provocaret, Societas juſſit monumenta antiquiora conſuli, & Sociis aliquot qui his examinandis aptiores viderentur in mandatis dedit, ut in hanc rem inquirerent ; & quæ in ſcriptis antiquis invenirent ad ſe referrent, una cum eorum Sententia. Et Arbitrorum Conſeſſus collectionem ex Epiſtolis & aliis MSS. ſupra impreſſam ad Societatem retulerunt, una cum eorum Sententia ſequente.

WE have conſulted the Letters and Letter-books in the Cuſtody of the Royal Society, and thoſe found among the Papers of Mr. John Collins, *dated between the Years* 1669 *and* 1677 *incluſive ; and ſhewed them to ſuch as knew and avouched the Hands of Mr.* Barrow, *Mr.* Collins, *Mr.* Oldenburg *and Mr.* Leibnitz ; *and compar'd thoſe of Mr.* Gregory *with one another, and with Copies of ſome of them taken in the Hand of Mr.* Collins ; *and have extracted from them what relates to the Matter referr'd to us ; all which Extracts herewith deliver'd to you, we believe to be genuine and authentick : And by theſe Letters and Papers we find,*

I. *That Mr.* Leibnitz *was in* London *in the beginning of the Year* 1673, *and went thence in or about* March *to* Paris, *where he kept a Correſpondence with Mr.* Collins *by means of Mr.* Oldenburg, *till about* September 1676, *and then return'd by* London *and* Amſterdam *to* Hannover : *And that Mr.* Collins *was very free in communicating to able Mathematicians what he had receiv'd from Mr.* Newton *and Mr.* Gregory. II. *That*

LIteras & Literarum Apographa tam quæ in Archivis Regiæ Societatis, quam quæ inter Chartas D. *Joannis Collinii* aſſervantur, & inter Annos 1669 & 1677 datæ ſunt, inſpeximus ; & ex his, quæ D. *Barrovii*, D. *Collinii*, D. *Oldenburgi* & D. *Leibnitii* nomen ferebant, ex fide aliquorum qui eorum autographa probe noverant, ipſorum eſſe certo didicimus. Literas autem quæ *Gregorium* præ ſe ferebant auctorem, ipſius eſſe cognovimus fide *Collinii*, qui nonnullas earum *Gregorio* aſſignatas manu ſua exſcripſerat. Ex his omnibus excerpſimus quæcunque ad rem nobis commiſſam pertinere videbantur ; atque illa excerpta quæ una cum ipſis literis jam vobis traduntur, fideliter & accurate facta eſſe comperimus. Ex his autem Literis chartiſq; nobis conſtat.

I. D. *Leibnitium* anno ineunte 1673 *Londini* fuiſſe, unde Menſe *Martio* vel circiter *Pariſios* adiit, ubi Literarum commercium habuit cum D. *Collinio* intercedente *Oldenburgo*, uſque in Menſem *Septembrem* 1676. Deinde per *Londinum* & *Amſtelodamum Hannoveram* reverſum eſſe. D. autem *Collinium* Matheſeos peritis ea quæ a D. *Newtono* & *Gregorio* acceperat lubentiſſime communicaſſe. II. D. *Leib-*

II. *That when Mr.* Leibnitz *was the first time in* London, *he contended for the Invention of another* Differential Method *properly so call'd*; *and notwithstanding that he was shewn by Dr.* Pell *that it was* Mouton's *Method, persisted in maintaining it to be his own Invention, by reason that he had found it by himself, without knowing what* Mouton *had done before, and had much improved it. And we find no mention of his having any other* Differential Method *than* Mouton's, *before his Letter of 21st of* June 1677, *which was a Year after a Copy of Mr.* Newton's *Letter, of 10th of* December 1672, *had been sent to* Paris *to be communicated to him*; *and above four Years after Mr.* Collins *began to communicate that Letter to his Correspondents*; *in which Letter the Method of* Fluxions *was sufficiently describ'd to any intelligent Person.*

III. *That by Mr.* Newton's *Letter of the 13th of* June 1676 *it appears, that he had the Method of* Fluxions *above five Years before the writing of that Letter. And by his* Analysis per Æquationes numero Terminorum Infinitas, *communicated by Dr.* Barrow *to Mr.* Collins *in* July 1669, *we find that he had invented the Method before that time.*

IV. *That the* Differential Method *is one and the same with the* Method *of* Fluxions, *excepting the Name and Mode of Notation*; *Mr.* Leibnitz *calling those Quantities* Differences, *which Mr.* Newton *calls* Moments *or* Fluxions; *and marking them with the Letter* d, *a Mark*

II. D. *Leibnitium*, cum prima vice *Londinum* adiit, Methodi cujusdam Differentialis, proprie sic dictæ, se Inventorem perhibuisse : Et etiamsi D. *Pellius* ipsi monstraverat eandem antea a D. *Moutono* usurpatam fuisse, haud tamen sibi Inventoris jura asserere destitisse ; cum quia proprio ut aiebat marte sua illa invenisset, nondum visis iis quæ *Moutonus* prius ediderat, tum quia plurima adjecisset. Neque usquam mentionem reperimus factam alterius Methodi ejus Differentialis præter istam *Moutoni*, ante Literas ejus 21 *Junii* 1677 datas ; hoc est, Anno integro postquam D. *Newtoni* Epistola, 10 *Decembris* 1672 scripta, *Parisios* ipsi communicanda transmissa fuit ; & quadriennio postquam D. *Collinius* eandem Epistolam cum Amicis communicare cœpit. In hac autem Epistola Methodus Fluxionum idoneo harum rerum cognitori evidenter satis describitur.

III. Ex Literis D. *Newtoni* 13 *Junii* 1676 datis, manifestum est Fluxionum Methodum ipsi innotuisse, quinquennio prius quam Epistolam illam scriberet. Et ex *Analysi* ejus *per Æquationes numero Terminorum Infinitas*, quam D. *Barrovius* cum D. *Collinio* Mense *Julio* Anni 1669 communicavit, constat illum etiam ante illud tempus eandem excogitasse.

IV. *Methodus Differentialis* una eademque est cum *Methodo Fluxionum*, si Nomen & Notationis modum exceperis. D. *Leibnitius* enim eas quantitates *Differentias* appellat quas D. *Newtonus Momenta* vel *Fluxiones* : easque nota literæ [d] designat, quam non adhibet

Mark not used by Mr. Newton. *And therefore we take the proper Question to be, not who invented this or that Method, but who was the first Inventor of* the Method. *And we believe that those who have reputed Mr.* Leibnitz *the first Inventor, knew little or nothing of his Correspondence with Mr.* Collins *and Mr.* Oldenburg *long before; nor of Mr.* Newton's *having that Method above Fifteen Years before Mr.* Leibnitz *began to publish it in the* Acta Eruditorum *of* Leipsick.

For which Reasons, we reckon Mr. Newton *the first Inventor; and are of Opinion, that Mr.* Keill *in asserting the same, has been no ways injurious to Mr.* Leibnitz. *And we submit to the Judgment of the Society, whether the Extract of Letters and Papers now presented to you, together with what is extant to the same purpose in Dr.* Wallis's *third Volume, may not deserve to be made Publick.*

adhibet D. *Newtonus*. Rem proinde de qua agimus hanc autumamus esse; non Uter hanc uter illam Methodum invenerit; sed Uter Methodum ipsam, quæ unica est, prior invenerit. Simul illos qui D. *Leibnitium* pro Inventore primo habuere, de eo quod inter illum & D. *Collinium* olim intercesserat commercio parum aut nihil resciviße opinamur; neque intellexiße D. *Newtonum* eadem Methodo usum esse, quindecim prius annos quam D. *Leibnitius* eam in Actis Eruditorum *Lipsiæ* evulgare cœpit.

Quibus perpensis, D. *Newtonum* primum esse hujus Methodi Inventorem arbitramur; atque ideo D. *Keillium*, eandem illi asserendo, nullo modo D. *Leibnitium* calumnia aut injuria affecisse. Judicio autem Societatis permittimus, utrumne Excerpta Literarum, reliquæque chartæ his subnexæ, una cum iis quæ extant in tertio Volumine Operum D. *Wallisii* huc spectantibus, simul imprimi & in publicum prodire mereantur.

His autem Die Aprilis 24° 1712 *acceptis, Societas Regia collectionem Epistolarum & MSS*[torum]*, & Sententiam Consessus imprimi jussit; ut & quicquid amplius ad hanc Historiam elucidandam idoneum in Actis Eruditorum occurreret.*

F I N I S.

ERRATA sic Corrigantur.

Pag.	Lin.	pro	Lege
5	7	BE	BF
11	18	$+\frac{509x^4}{1638a^3}$	$+\frac{509x^4}{16384a^3}$
	24	$-\frac{1}{3}x+q$	$-\frac{1}{4}x+q$
12	22	$x+\frac{a}{4}$	$x-\frac{a}{4}$
13	17	$\frac{a^5b^3x^3}{a^{10}}$	$\frac{6a^5b^3x^3}{c^{10}}$
14	19	$+2x^{\frac{3}{4}}$	$+2x^{\frac{4}{3}}$
16	4	$\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5$	$\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$
17	20	$\frac{7\times8}{8\times9}$	$\frac{7\times7}{8\times9}$
30	13	BC	BD
37	12	120 & 137	115 & 137
38	25	Amicis	Amicis in *Anglia*
40	19	$+\frac{1}{5040}z^7+\frac{1}{362880}z^9+$	$-\frac{1}{5040}z^7+\frac{1}{362880}z^9-$
50	15	$+c^{10}$	$+2c^{10}$
57	6	$\frac{16x^3}{525a^3}\sqrt{dx}$	$\frac{2\times16x^4}{525d^3}\sqrt{dx}$
70	38	*Mercator* demonſtravit	*Mercator* demonſtravit & auxit
34	Ult.	& reſtat $z-t$	& (ponendo 1 pro r) reſtat $z-t$
86	34	Analyſin per	Analyſin inverſam per
104	27	Pag. 70, 71, 72	Pag. 56, 70, 71, 72
108	32	Corollarium	Scholium
109	24	*Maio* & *Junio*	*Sept.* & *Octobri*

